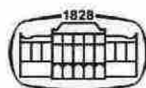
RONIT BIRD

Hogyan győzzük le a számolási nehézségeket?



AKADÉMIAI KIADÓ

A fordítás alapjául szolgáló kiadás:
Ronit Bird: *Overcoming Difficulties with Number. Supporting Dyscalkulia and Students who Struggle with Maths.*
English language edition published by SAGE Publications of London, Thousand Oaks, New Delhi and Singapore,

Fordította: Siposs András
Szaklektor: Ternai Gabriella
Szerkesztő: Doba Dóra

ISBN 978 963 05 9016 7

Kiadja az Akadémiai Kiadó,
az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja
1117 Budapest, Prielle Kornélia 19.
www.akademiaikiado.hu

Első magyar nyelvű kiadás: 2011

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó Zrt. igazgatója
Felelős szerkesztő: Pomázi Gyöngyi
Vezető szerkesztő: Thimar Márta
Termékmenedzser: Kiss Zsuzsa
Tördelés és borítóterv: CompLex Kiadó Kft. DTP-csoport
Nyomdai munkálatok: Kinizsi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Bördős János ügyvezető igazgató

Printed in Hungary

Tartalom

Az elektronikus *Melléklet* tartalma

A szerzőről

Ronit Bird tanárnő; speciális tanulási nehézségekkel, elsősorban diszlexiával küzdő diákokkal foglalkozik. A London University tanári diplomája után fejlesztőpedagógusi képesítést szerzett. Egy átlagos iskolában diszlexiás diákokkal foglalkozva kezdett új tanítási módszereket kidolgozni a matematikai nehézségekkel küzdő diákok számára. Tanított általános iskolában és középiskolában, a magán és az állami szektorban egyaránt, speciális nevelési igényű diákok fejlesztőpedagógusaként. Ma is tanárként és fejlesztő tanfolyamok tanácsadójaként dolgozik. Egy országos angol oktatási program, a Harrow Dyscalculia Project keretében tart továbbképzéseket tanároknak, és oktatási szakértőként segíti a programban részt vevő iskolák munkáját.

A fordítóról

Siposs András matematika–fizika szakos tanár. Tanári diplomáját 1982-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerezte. Elsősorban középiskolás diákokat tanít, de szerzett gyakorlatot az általános iskolás korosztállyal és a felsőoktatásban is. Számos tankönyv, példatár, segédkönyv szerzője – főként matematikából, de fizikával, sőt nyelvészeti témákkal is foglalkozott. Könyveit szinte minden iskolatípusban használják (általános iskola, szakiskola, szakközépiskola, gimnázium, felsőoktatás). 2003-ban Angliában tanulmányozta az ottani matematikaoktatást.

A lektorról

Ternai Gabriella gyógypedagógus-logopédus, speciális pedagógia szakos tanár. A főiskola elvégzése után tíz évig az ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Főiskolai kar Gyakorló Logopédiai Intézetének munkatársa volt. Itt került szoros szakmai kapcsolatba Dékány Judittal, a diszkalkulia ismert magyarországi képviselőjével, és szerzett tapasztalatot a számolási zavar elmélete és gyakorlata terén. A diagnosztikai és a terápiás munka mellett részt vett a főiskolai hallgatók gyakorlati képzésében. Az utóbbi években a számolási zavar felismerésével és terápiájával foglalkozó tanfolyamok, továbbképzések, konferenciák gyakran felkért előadója országszerte. Jelenleg a II. kerületi Pedagógiai Szakszolgálat munkatársa, ahol 6–18 éves, számolási nehézséggel küzdő diákoknak „segít": a fejben számolás kialakításával igyekszik megszerettetni velük a matematikát.

Hogyan használjuk a könyvet?

Ez a könyv azok számára készült, akik tanárként, szülőként vagy más minőségben olyan gyerekekkel foglalkoznak, akiknek még nem alakult ki biztos, megértésen alapuló, fogalmi tudásuk a négy alapművelettel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) kapcsolatban. Hasznosíthatják idősebb diákok is, akik még mindig szorongással és gyakran hibásan végeznek egyszerű számításokat, vagy segítségre szorulnak, mert nincsenek biztos fogalmaik a számok és műveletek terén.

Alább felsorolunk néhány kulcsmozzanatot, amelyek alapvető fontosságúak a számok és műveletek világának megértésében. A könyv részletes gyakorlati tanácsokat ad ezek tanításához, figyelembe véve a szükséges előismereteket és képességeket.

- A tízes átlépés (a 10 és többszörösei esetében)
- A kivonás mint kiegészítő összeadás (így a diák mindig előrefelé számol)
- Számegyenesen való összeadás és kivonás, nem csupán munkamódszerként, hanem a vizuális rögzítés eszközeként is
- Vizuális technikák a fejben való számolás segítésére
- A szorzás és az osztás területi modellje
- A szorzás és az osztás egyszerre való tanítása (így a diák mindig előrefelé számol)
- A logika és a következtetés használata az ismeretszerzésben és a képességfejlesztésben

A könyvben bemutatott módszerek fejlesztése során a fentiek bizonyultak a kulcsmozzanatoknak a számolási eljárások tanításában. A továbbiakban meghatároztuk ezek szerkezeti és logikai egymásra épülését a tanítás és tanulás folyamatában. A kidolgozott módszerek rendszeres és folyamatos fejlődést eredményeznek, kis lépésekben haladnak, gyakori megerősítéssel. Minden lépés csak egy új elemet tartalmaz, így a diák nem ütközik minduntalan megértési nehézségekbe, hanem sikerélményeket szerez a matematikatanulás során.

Nem formális és merev tanítási programot akartam alkotni, hanem megpróbáltam feljegyezni, részletesen bemutatni és közzétenni az általam használt módszereket, ötleteket, amelyeket sikerrel alkalmaztam saját tanítványaimnál. Számos nehézséggel és közkeletű tévhittel kellett megküzdenem. Az általam javasolt feladatsorok és egymásra épülő tevékenységek túlnyomórészt gyakorlatiak és szóbeliek. Nem támogatom az írásbeli feladatmegoldást, mert úgy gondolom, a diszkalkuliás gyerekekben a hosszas dolgozatírás csak megerősíti mindazokat az eredménytelen gondolkodási eljárásokat, amelyek hozzájárultak a fejlődésükben mutatkozó hiányosságokhoz. Meggyőződésem, hogy minden diák számára a tanár a tudás legfőbb forrása, és a tanítás középpontjában mindig a logikus gondolkodásnak és a megismerésből fakadó matematikai modellalkotásnak kell állnia.

A könyvben ismertetett gyakorlatok mindegyike minimális előkészületet igényel. A szükséges eszközök többnyire könnyen beszerezhetők: dominók, dobókockák, játékkártyák, számkártyák, színes rudak, Dienes-készlet, papír és ceruza. (Ezek és további eszközök, játéktáblák, leírások kinyomtatható formában megtalálhatók a könyv letölthető elektronikus *Melléklet*ében.)

A könyv négy fő részből áll:

I. Az egyesével való számlálás leküzdése
II. A tízes átlépés technikája
III. A szorzás és az osztás területi modellje
IV. Következtetési módszerek

Minden fejezet rövid áttekintéssel kezdődik, amely összefüggéseiben mutatja be a témát, továbbá összefoglalja az egyes lépéseket, amelyek később egymást követő gyakorlatokká épülnek.

Az I. rész az egyik leggyakoribb problémával foglalkozik, amely megnehezíti a tanulók előrehaladását a számítások elsajátításában. Nevezetesen, hogy a diákok hajlamosak az egyesével való számlálásra hagyatkozni. A bemutatott sokféle gyakorlat és játék segíti az összetett tevékenység elsajátítását és a számlálás „csapdájából" való kikecmergést.

A II. rész részletes, lépésről lépésre haladó tanítási módszert mutat be a tízes átlépés megértetésére az összeadás és kivonás során. Előbb a szükséges képességeket és előismereteket elemzi, majd gyakorlatokat javasol ezek fejlesztésére és tanítására azon diákok számára, akiknél a szükséges fogalmak még nem elég biztosak. Ezután két fejezet foglalkozik a 10, majd a 10 többszörösei átlépésének tanításával. Ezek a fejezetek bemutatják a kivonásnak kiegészítő összeadásként való tanítását, és azt, hogyan juthatnak el a diákok a fejben való számolás konkrét szintjétől az elvont, absztrakt szintig.

A III. rész részletes, lépésről lépésre haladó tanítási módszert közöl a szorzás és osztás területi modelljére. Az első két fejezet összeveti a két műveletet, elemzi a szükséges képességeket és előismereteket, majd gyakorlatokat mutat ezek fejlesztésére és tanítására azon diákok számára, akiknél a szükséges fogalmak még nem elég biztosak. Két további fejezet foglalkozik azokkal a tanítási lépésekkel, amelyekkel a diákok megtanulják, hogyan juthatnak el az írott számítási eljárások során a megértés konkrét szintjétől az elvont szintre.

A IV. rész a következtetésekkel foglalkozik. Azok a diákok, akiknek nehézségeik vannak a matematikával, többnyire gondolkodásukban sem rugalmasak. Egyértelműen meg kell nekik mutatni, tanítani, hogyan vezethetnek le ismert tényekből újabbakat.

A könyv letölthető elektronikus *Melléklete* a használt szemléltetőeszközökről szóló rövid ismertetőt, kinyomtatható játékokat és feladatokat tartalmaz.

A szerző

A fordító előszava

Érdekfeszítő és kétségtelenül úttörő jellegű könyvet tart kezében az Olvasó. A számolási nehézségek és az ezekkel küzdő diákok mindig is jelen voltak az oktatásban. Az azonban, hogy miként tekintünk rájuk, változó. Itthon a buktatás, a kisegítő osztályba utalás kétségkívül mélyen gyökerező, hosszú „hagyományra" visszatekintő, ma is általánosan elterjedt módszer – de nem mondhatjuk, hogy bármit is megoldana, és különösen nem segít kievickélni az ilyen diáknak a számára is kínos gödörből. A modern gondolatok azonban lassan itthon is felütik fejüket, és ma már nem kizárólag egyéni lustaságnak vagy javíthatatlan képességhiánynak tekintik, ha egy gyermek nehezebben boldogul valamely tanulmányi területen. A diszlexia és diszgráfia fogalmai után kezdünk megismerkedni a diszkalkuliával is. Sőt, ebben a könyvben már feltűnik a diszpraxia is. Összefoglaló néven részképességzavarnak nevezik ezeket, és részben neurológiai, részben kora gyermekkori környezeti okokat sejtenek a háttérben. E kérdések megítélése a szakemberek körében sem teljesen egységes, a társadalom egészében pedig egyáltalán nem mondható teljes körűnek e kórképek létének elfogadása. Ugyanakkor bizonyos divat van kibontakozóban: sikk egy-egy „diszes" papírral rendelkezni, és így felmentést kapni bizonyos megmérettetések, próbatételek alól. Ez persze a valódi gondokkal küzdők helyzetét csak rontja. Mint minden új jelenség, némi átmenet után nyilván majd ez is konszolidálódik.

Addig is kezdeni kell valamit a tanulási nehézségekkel küzdő diákokkal. Talán senki számára nem kétséges, hogy külön, célzott, fejlesztő képzésre van szükségük, a többiekétől eltérő és jóval több gyakorlásra. Hogy ez milyen szervezeti keretek között zajlik, az persze más kérdés. Egy ország egészének oktatási lehetőségei – csakúgy, mint az érintett családokéi – korlátozottak. Van-e annyi pedagógus, tanterem, idő (és pénz!), amennyire szükség van – vagy annyi jut, amennyi van? Ezeknek a nehéz kérdéseknek a megválaszolásában nyújthat segítséget ez a könyv.

Ronit Bird minden sorából süt a gyerekek és „az ügy" szeretete. Nagy bőségben összeállított, változatos gyakorlatai nemcsak a diszkalkuliás gyerekek képzésével hivatásszerűen foglalkozó fejlesztőpedagógusok, hanem az áldozatkész szülők számára is hasznosak lehetnek. Nagyon szimpatikusan, magabiztosan, elkötelezetten áll az ügy mellett – de azért az általános brit viszonyokról is árulkodnak azok a (nem is ritka) mondatai, amelyekben az ottani előírásokkal, tanmenetekkel, oktatásirányítással perlekedik. A részképesség-zavaros gyerekek fejlesztő oktatása ügyében itthon is volna mit seperni hasonló porták előtt, de a fordítás során kerültem az itthoni viszonyokra való hivatkozást, az aktualizálást.

Más kérdésekben nem lehetett megkerülni az egyszerű fordítás helyetti adaptálást. A brit elemi iskolai számtanoktatás néhány tekintetben más úton jár, mint a magyar, és az eltérések miatt nem lehet – és nem is érdemes – minden részletet szolgaian másolni. Az írásbeli szorzás és osztás például teljesen más formalizmussal zajlik ott és itt, a gyakorlatokat ennek megfelelően kissé át kellett alakítani. Bizonyos nyelvtani nehézségek aszimmetrikusan jelentkeznek: ami probléma ott, az nem okoz gondot itt – vagy fordítva. (Az effélé nehézségeket fordítói jegyzetekben jeleztem.) Számos fogalom, eljárás, szemléltetőeszköz és segédeszköz nem ismert, nem használatos a magyar gyakorlatban, ezért bizony jócskán kellett új „szakszókincset" alkotnom. Ezeket felbukkanásukkor mindig értelmeztem, magyaráztam, és a kötet végi *Kislexikon*ba is felvettem a szerző eredeti fogalommagyarázatai mellé. A brit metodikában vannak bizonyos kitüntetett, központi szerepet játszó ismeretelemek („key facts" – kulcs-tények), amelyeket minden-

kinek, még a nehezen tanulóknak is magától értetődően, fejből kell tudniuk (például: a számok duplája, fele, tízszerese; az egyjegyű számok kiegészítése 10-re stb.). Nincs belőlük sok, de azokat be kell sulykolni. Itt ágazik el az általános és a fejlesztő képzés – legalábbis annak szerzőnk által képviselt iránya. Az előbbiben a diákoknak számos további memoritert kell megtanulniuk, az utóbbiban – mivel a diákok jellemzően memóriaproblémákkal küzdenek – inkább a manuális gyakorláson alapuló megértés és a kevés tényszerű ismeretből a többi kikövetkeztetése irányában haladnak.

Magával ragadó, sőt néha egyenesen megható a szerző elkötelezettsége, hogy a megértés tanítására helyezze a hangsúlyt. Ezt magam is múlhatatlanul fontosnak tartom. Ugyanakkor ezt gyakran – és kimondva is – a fejből megtanulandó, megjegyzendő tényanyag ellenében, annak rovására igyekszik érvényesíteni. Nekem személy szerint néha indokolatlannak, erőszakoltnak tűnik ez a szembeállítás. Saját szakmai integritásom és hitelem fenntartása érdekében nem titkolhatom el, hogy néha bizony nem értek egyet a szerzővel. Ezt többnyire elhallgattam, de néhány kivételes esetben – a passzus korrekt lefordítása után – megjegyzésben utaltam rá. A Ms Bird által javasolt eljárások és a megértés megcélzott szintje – szerintem és napi gyakorlatban ezzel foglalkozó, szakértő kollégák szerint is – gyakran inkább csak a csoport legjobbjai, a „krém" által teljesíthetőek, semmint éppen a tanulási nehézséggel küzdők, a diszkalkuliások által. De – mint írja – ezek a saját praxisában kipróbált és bevált gyakorlatok, ezért minden elismerés megilleti.

Kíváncsian várom az itthoni tapasztalatokat módszeréről, amelynek elterjedését az itthoni viszonyok nem biztos, hogy segíteni fogják. Az egész könyvet áthatja valami olyan szabadság és nyugalom, a parttalan – elsősorban időbeli – lehetőségek érzete, aminek itthoni alkalmazhatósága inkább naivitásnak, mint realitásnak tűnik. Az olyan visszatérő fordulatok, mint „Ne engedjünk a tanmenet szorításának", és „Gyakoroljunk addig, amíg csak a diákoknak szükségük van rá", egy nagyon más környezetben foganhattak csak meg. Bizonyos ismeretekkel rendelkezvén a brit állami oktatásról, az a gyanúm, hogy ez ott is csak a magánszférában tehető meg. Abban itthon is szép sikereket érhet el a Bird-módszer, pedig az állami oktatásban is szenved épp elég diák a matematika nehézségeitől. Ők is megérdemelnék a kikecmergés reményének e néhány szalmaszálát.

Sipos András

A lektor előszava

„Nem érted, hogy nem értem?" – kérdi elkeseredetten a számtanpélda fölé görnyedő 3. osztályos fiú. „Nem értem, hogy mit nem lehet ezen érteni?!" – elégedetlenkedik a szülő vagy a pedagógus az „egyszerű" matematikafeladat láttán.

Valóban jogos a kérdés. A számolási zavar fő jellemzője az intelligenciaszint alapján elvárhatónál lényegesen alacsonyabb matematikatanulási teljesítmény. Éppen a jó intellektusból fakadó kompenzálási készség miatt sokáig fel sem tűnik, hogy a matematika tanulásához szükséges képességek minőségileg eltérően fejlődnek. Ezeknek a diákoknak főként a tízes, húszas és százas számkörbeli alapműveletek (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) elvégzésével akadnak gondjaik. A lelkiismeretes otthoni gyakorlás és a rendszeres korrepetálás ellenére sem képesek elszakadni az eszközhasználattól, és gyakran számolnak az ujjaikon. Nem képesek a fejben való gyors műveletvégzésre, mert nem alakultak ki a szám- és mennyiségfogalmaik. Ezek a fogalmak 5–7 éves korban, elvonatkoztatással fejlődnek ki, azonban a matematikai gondolkodás megalapozása már 1–2 éves kortól elkezdődik. Hogyan? Tapasztalatszerzéssel. 6 tányér, 6 kanál és 6 villa láttán úgy alakul ki a hatos szám fogalma, hogy a tárgycsoportok lényeges közös tulajdonságát kiemeljük, és megállapítjuk, hogy mindegyikből hat van. A hatos számhoz tartozó mennyiségfogalom a fejben „születik". Ilyenkor elvonatkoztatunk a tárgyak számosságon kívüli összes tulajdonságától. A hatot nem lehet megfogni, és bár az ujjainkkal meg tudjuk mutatni, ez a konkrét tárgyhoz (testrészhez) kapcsolódik, és nem elvonatkoztatás. A hat mint kimondott számnév és mint leírt számjegy társadalmi megegyezésen alapul – abból a célból, hogy a megfoghatatlan „megfogható" legyen.

Ronit Bird gyakorlatorientált könyve éppen arról szól, hogyan segítsünk tanítványainknak eljutni a konkrétum szintjétől az elvonatkoztatásig. Ez egy fontos láncszem, és akinek nem okoz gondot, nem is tudja, nem is érti, hogy ilyen egyáltalán létezhet. Ez éppen olyan, mintha valaki nem tudna megtanulni biciklizni vagy úszni.

Ennek a könyvnek abban rejlik az értéke, hogy a „mit?" helyett a „hogyan számoltál?" kérdésre helyezi a hangsúlyt. A szerző módszertanilag alaposan kidolgozott rendszert épített fel, amelynek középpontjában a tárgyakkal való sokoldalú manipuláció áll. Önálló gondolkodásra és az összefüggések felismerésére inspirál, és nem kész műveleti sémákat erőltet. Támogatja az egyéni számolási eljárásokat, időt hagy a feladatok megoldására. Módszere kiváló segédanyag lehet a fejlesztő- és gyógypedagógusoknak, akik a számolási zavarral és számolási nehézséggel küzdő gyerekeknek éppen a vizualizáció segítségével adhatnak támpontot a számukra nehézséget jelentő fejszámoláshoz.

Külön öröm számomra, hogy a szerző nagy hangsúlyt fektet az alapismeretek elsajátítására és begyakorlására. Jó lenne, ha Magyarországon is egyre többen elismernénk az általános iskola első osztályában folyó oktató-nevelő munka kulcsfontosságú szerepét. Lassabb tempójú oktatással, tárgyakkal való manipulációval és sok játékos gyakorlási lehetőséggel azoknak a diákoknak is ki tudjuk alakítani a számfogalmait, akik éppen ezek hiánya miatt válnak ál-diszkalkuliásokká. Ha valaki nem tud fejben számolni tízes számkörben, annak érthető módon nem fog menni sem a tízes átlépés, sem az erre épülő tananyagrészek. Ha tananyag helyett gyerekeket tanítunk, a lehető legtöbbet tettük, amit tehettünk.

A kiváló fordítói munka és a szakszerű adaptáció lehetőséget teremt arra, hogy az olvasók újabb ötleteket merítsenek a könyvből a számolási problémák megoldásához.

Ternai Gabriella

Háttér

A diákok sokféle okból teljesíthetnek gyengén matematikából. Az egyik ok az lehet, hogy a tanítási módszer nem olyan, mint amire a diáknak szüksége lenne. A másik lehetséges ok valamely tanulási nehézség (részképességzavar) megléte. Egy 2008-as angliai felmérés[1] szerint a diákok kb. 6%-ának matematikai tudása jelentősen elmarad az elvárttól (például még felsőben sem képesek teljesíteni az alsó tagozatos elvárásokat*), és ez az arány nagyjából egy évtizede változatlan. Dacára az 1990-es évek második felében bevezetett angol oktatási reformnak és a kormányok arra irányuló erőfeszítéseinek, hogy emeljék a matematikatanítás és -tanulás színvonalát, a tanulók egy kis csoportjának továbbra is jelentős és állandó nehézségeket okoznak az alapvető számítások.

Egyre szélesebb körben válik elfogadottá, hogy létezik a matematikához kötődő speciális tanulási nehézség. Brian Butterworth professzor Anglia vezető szaktekintélye a diszkalkulia terén. Az ő becslése szerint[2] az össznépesség 4–6%-a szenved ebben a neurológiai eredetű részképességzavarban, amely a számok és műveletek tanulása során okoz nehézségeket. Más szakértők a népesség 4–10%-ára teszik a diszlexiások számát,[3] és ehhez az esetek kb. 50–60%-ában még számolási nehézségek is társulnak.[4] Ezek a tanulási nehézségek a diákok észlelési és gondolkodási képességeiben gyökereznek.

Az egybehangzó statisztikai adatok alapján minden tanár számíthat rá, hogy akármelyik átlagos osztályban akad egy-két diák, aki az említett zavarok miatt küzd számolási nehézségekkel. Bármi is legyen e nehézségek oka, az a diák, aki nem sajátította el az alapvető számolási eljárásokat, nem fogja tudni sikerrel elvégezni az általános iskolát sem, hacsak nem részesül sajátos problémáinak megfelelő, speciális képzésben.

A számoláshoz kötődő speciális tanulási problémák

Diszkalkulia

Ezt a részképességzavart egy angol oktatáskutató intézet 2001-ben a következőképpen határozta meg:[5]

Olyan állapot, amely befolyásolja a számolási képességeket. A diszkalkuliás diákban nehezen alakulnak ki a számfogalmak, hiányzik az erre való ösztönös képessége, problémái vannak a számokkal kapcsolatos állítások és eljárások megtanulásával. Ha jó eredményt kap is, vagy helyes módszert is használ, azt csak mechanikusan és önbizalom nélkül teszi.

* Ez a hazai iskolaszerkezetre való átértelmezése az eredeti szöveg adatainak. (A ford. megjegyzése)

Aki tanárként azt tapasztalja, hogy egy egyébként jól teljesítő diákja meglepően nehezen végzi el az egyszerű számításokat, az alapműveletek végzése során az ujjain számol, a többiekhez képest jelentősen elmarad a matematikai fejlődésben, az gyanakodhat, hogy diszkalkuliással van dolga. Az ilyen diák feltűnően „nem érzi" a számokat, nem képes átlátni, jól megbecsülni még kevés elem darabszámát sem, és fogalma sincs, hogy egy számítás eredménye egyáltalán lehetséges-e vagy képtelenség. Rövid és hosszú távú memóriája gyenge, és emiatt képtelen pontosan felidézni a tanult állításokat és eljárásokat, akárhányszor is próbálta őket megtanulni kívülről. Nem megy a fejébe a szorzótábla, és hiába tud az egyik nap valamit, az másnap már nem megy neki. A két-három lépésnél összetettebb tevékenység során könnyen elveszti a fonalat, hogy hol is tart, mit is csinál éppen. Még az egyszerű számolás is gondot okozhat neki, különösen a visszafelé számlálás.

Diszkalkuliára utalhat, ha egy diák:

- kisszámú elemet sem tud átlátni, megbecsülni (mennyiségüket meghatározni a megszámlálásuk nélkül),
- nem képes felismerni, hogy egy számítási eredmény lehetséges-e vagy képtelenség,
- rövid és hosszú távú memóriája gyenge,
- nem tud megbízhatóan visszafelé számolni,
- rosszul tájékozódik térben, síkban,
- keveri a jobb–bal irányokat,
- nagyon lassú a számításokban,
- nehezen tudja a dolgokat sorba rendezni,
- nehezen absztrahál, gondot jelent számára az elvont gondolkodás,
- (számtani értelemben) rosszul bánik a pénzzel,
- nehezen olvassa le az óráról az időt, vagy ezt a többieknél jóval később tanulja csak meg,
- nem tudja jól beosztani az idejét, megszervezni a napi teendőit.

Diszlexia

A diszlexiás gyerek a fent felsorolt tünetek közül valószínűleg többet is mutat, hiszen legalább fele részük diszkalkuliás is egyben. Ezenfelül gyanús lehet, ha az elvárhatónál kevésbé folyékonyan, viszont vonakodva olvas és ír, szövegértése akár többszöri újraolvasás után is gyenge, helyesírása rossz, keveri a betűket. Az ilyen diák sokkal jobban teljesít szóban, mint ahogyan az szánalmasan összecsapott és rövid írásbeli munkái alapján várható lenne tőle. További tünet lehet, ha nehezen boldogul a hallás útján szerzett információkkal, és nehézségei vannak a tervezéssel, szervezéssel.

Diszpraxia

A diszpraxia főként mozgásos zavar. Az ilyen gyerek esetlen, ügyetlen, koordinálatlan, gyenge a tervezésben és szervezésben, sikertelen a testnevelésórán és a sportban, ahol fontos az egyensúly és az összehangolt mozgás. Nem jó a helyzetérzékelése, ezért folyton csetlik-botlik, esik-kel, lever és eltör dolgokat, elveszti a holmiját. A matematikaórán problémái vannak az eszközhasználattal (körző, vonalzó, szögmérő), írásbeli munkája rendetlen és nehezen értelmezhető. A tipikus diszpraxiás diáknak viszont nincsen problémája a hosszú távú memóriával, így például könnyen megtanulja a szorzótáblát.

Felismerés

A legkönnyebben felismerhető tünetek, ha egy gyerek (1) nehezen számol visszafelé; (2) képtelen megtanulni a szorzótáblát; (3) a műveleteket egyesével számlálva végzi. Ilyen esetekben felzárkóztatásra vagy további célzott vizsgálatokra lehet szükség. Megfelelő tesztekkel és neurológiai kutatások alapján

készült eszközökkel[6] pontosan megállapítható a diszkalkulia megléte vagy hiánya (csakúgy, mint a diszlexia vagy a diszpraxia). Pontos diagnózis felállításához szakember által végzett alapos kivizsgálás szükséges.

A számolási nehézségekkel küzdő gyerekek speciális képzése

A következő pontokban összefoglaljuk, hogy a könyv milyen megközelítésben tárgyalja a számolási kulcskompetenciák tanítását–tanulását.

- Kezdjük a szemléltetőeszközökkel. Ezek legyenek matematikailag megalapozottak és alkalmasak sokféle számolási helyzet modellezésére. (És az sem árt, ha elég strapabírók.) Véleményem szerint a tízes alapú számrendszer tanítására a legjobb kezdő felszerelés a színes rudak és a Dienes-készlet.
- Hagyjuk, hogy ezeket az eszközöket a diákok maguk használják, ne csak mi mutassuk be nekik azokat.
- Ne hagyjuk, hogy a diákok mechanikusan használják ezeket az eszközöket, pusztán a megoldás megtalálására. Valódi szerepük abban áll, hogy segítik a vizualizációs technikát és a gondolkodási modellek kialakítását.
- Főként azokat a diákokat célozzuk, akiknek az egyesével számlálás az egyetlen módszerük. Mielőtt matematikailag fejleszthetnénk őket, először segítenünk kell nekik, hogy kikerüljenek „a számlálás csapdájából". Meg kell tanítani őket részekben és egészekben gondolkodni, összerakni és felbontani számokat.
- Hagyjunk mindenre elég időt. Hagyjuk a gyerekeket, hogy annyi ideig használják a szemléltetőeszközöket, ameddig igénylik. Adjunk bőven lehetőséget az ismétlésre és a hibák kijavítására. Egy kérdés után tartsunk szünetet, hogy a diáknak legyen elég ideje végiggondolni, mit is kérdezünk tőle pontosan. Érezze, hogy nem siettetjük, és van elég ideje megadni a helyes választ. A kérdésfeltevés, a problémafelvetés, a hibákra való rámutatás és azok kijavítása ne a tanóra vagy a témakör végére maradjon, hanem akkor kerüljön sorra, amikor a diáknak még van elég ideje mindezeket megérteni, átgondolni. Ne engedjünk a tanmenet szorításának, csak akkor lépjünk tovább, ha a diák már biztosan elsajátította a korábbi témát, és otthonosan mozog benne.
- Sokat beszéljünk tanítás közben, és biztassuk a diákokat is, hogy fogalmazzák meg, mit csinálnak éppen. Szoktassuk rá őket, hogy megfigyeléseiket, gondolataikat szavakba öntsék. Változatos kifejezéseket, nagy szókincset alkalmazzunk, és tanítsunk nekik is.
- Tanításunk középpontjában a gyakorlati tevékenységek és játékok álljanak. Mutassuk meg, hogy örömet okozhat egy feladvány megoldása, az ahhoz vezető tevékenykedés maga; hogy a matematika valami, amit csinálunk, és amit nem kell feltétlenül leírnunk. Az írásos számításokat úgy vezessük be, hogy az csak lejegyzése, rögzítése annak, amit már úgyis megtettünk és megértettünk.
- Kis lépésekben haladjunk. A tanítás–tanulás folyamán minden témát bontsunk apró részekre, és egyszerre mindig csak egy új fogalmat vagy ötletet vessünk fel.
- A cél az, hogy a diák fokozatosan haladjon a számítások megértésének konkrét szintjétől az ábrázoláson át az elvont, tisztán absztrakt szintig.
- Buzdítsuk a diákokat, hogy a számításokat a lehető legkevesebb lépésben végezzék el, csökkentve ezzel is a munka során a memóriájukra nehezedő terhet.
- Nagyobb figyelmet fordítsunk arra, hogy hogyan jön ki a megoldás, mint arra, hogy mi is az.
- Hagyjuk a diákot hibázni. Mutassuk meg, hogy a hiba nemcsak elkerülhetetlen rossz, hanem segítség is lehet a tanulás, megértés során.
- Minden új ismeretet és módszert a korábban már megtanultakra, tudottakra építsünk, és tegyük világossá a kapcsolódást. Győződjünk meg róla, hogy a diák rendelkezik a szükséges előismeretekkel és képességekkel.
- Mutassunk és engedjünk használni egyéni számolási eljárásokat a szabályos, leírt műveletek helyett, hogy a diák lássa, képes jó eredményt kapni ésszerű időn belül.

- Csökkentsük a minimumra a könyv nélkül megtanulandó anyag mennyiségét. Fókuszáljunk a széles körben alkalmazható kulcsmozzanatokra. Ha több megfelelő eljárás is van egy számítás elvégzésére, ne várjuk el a diáktól, hogy mindegyiket elsajátítsa. Hagyjuk, hogy a neki legmegfelelőbbet válassza, és azt gyakorolja a megbízható szint eléréséig.
- Tanítsuk meg világosan érvelni a diákot. Mutassuk meg neki, hogyan bővítheti a tudását logikus gondolkodással, következtetések révén.

Hivatkozások

1 Department for Children, Schools and Families (DCSF) (2008) Independent Review of Mathematics Teaching in Early Years Settings and Primary Schools. Ref: DCSF–00433–2008.

2 B. Butterworth (2004) 'Developmental dyscalculia', in *The Handbook of Mathematical Cognition*, vol. 1, 6, ch. 26, ed. J.E.D. Campbell, p. 455, Routledge.

3 Department for Innovation, Universities and Skills (a government department set up in June 2007), www.dfes.gov.uk/curriculum_literacy/access/dyslexia.

4 L.S. Joffe (1981) 'School mathematics and dyslexia', unpublished doctoral thesis, University of Aston, Birmingham, UK.

5 Department for Education and Skills (DfES) (2001) *Guidance to Support Pupils with Dyslexia and Dyscalculia*. Ref: DfES–0512–2001.

6 Brian Butterworth dolgozta ki a 6–14 éves gyermekek számára a standardizált számítógépes alapú diagnosztikus szűrőeszközt (Computer-based Dyscalculia Screener), amely pedagógiai oldalról méri a számolási problémák meglétét (vagy hiányát) és súlyosságát. A különböző matematikai feladatok (műveletek) elvégzése 30-35 percet vesz igénybe, eközben az eszköz méri a gyorsaságot (reakcióidőt) és a hibaszámot, s ebből következtet a diagnózisra.

I. RÉSZ

Az egyesével való számlálás leküzdése

1. FEJEZET

Ötlettár az egyesével való számlálás leküzdésére

Áttekintés

A számolási nehézségekkel küzdő gyerekek többnyire hajlamosak az egyesével való számlálásra.* Ez a diákok többsége számára a fejlődés egy természetes lépcsőfoka, a bizonytalan számfogalommal rendelkezők számára azonban mankóvá válik. Azok, akik továbbra is erre a nehézkes módszerre hagyatkoznak, „a számlálás csapdájába" esnek, és nem érik el a számolás hatékonyabb szintjét.

A számlálás csapdája az a helyzet, amelyben a diák kevés biztos aritmetikai tudással rendelkezik, ezért minden számítást újra a semmiből kell elkezdenie, nem tud a korábban tanultakra támaszkodni. Egyesével számol, és ez a fáradságos és hosszadalmas eljárás annyira megerőlteti az amúgy is gyenge memóriáját, hogy a megtalált eredmény már nem kapcsolódik a kérdéshez, vagyis nem gyarapítja a diák ismereteit. A diák fejében igen kevés a számokkal kapcsolatos tényanyag, amit azonnal elő tudna hívni, fel tudna idézni. Mindig mindent újra ki kell számolnia.

Az ilyen gyermek gondolkodását, számolási technikáját fejleszteni kell. Meg kell őt tanítani arra, hogy az egyesek helyett nagyobb tömbökben, lépésekben gondolkodjon. A cél az, hogy csökkentsük a számolási lépések számát, így növeljük a diák esélyét arra, hogy ésszerű időn belül helyes eredményre jusson, és közben ne terhelje fölöslegesen a memóriáját. Eddie Gray egyik tanulmányában[1] bemutatja, hogy az egyesével számlálás „biztonsága" hogyan akadályozza a rugalmas gondolkodás kialakulását, és hogyan akadályozza azt a felismerést, hogy a számításokat tömöríteni kell annak érdekében, hogy az új eredmények bekerüljenek a hosszú távú memóriába.

Annak a diáknak, aki rendszeresen az ujjain számol, sok gyakorlásra van szüksége, hogy teljesen otthonosan mozogjon a számok világában – előbb csak tízig, majd kiterjesztve, húszig. Gyakorolnia kell, hogy a megoldás érdekében ossza fel a számokat kisebb-nagyobb egységekre, és ezekkel dolgozzon, ahelyett, hogy egyesével számolna. A cél az, hogy a fejletlen módszert egy hatékony módszerre cserélje. A diák azonban – érthetően – nehezen fogja feladni jól bejáratott számolási szokásait, mielőtt teljesen biztos lenne az új módszer, az új szemlélet előnyeiben. Csak sok-sok gyakorlás után fogja elfogadni, hogy nagyobb tömbökkel jobb dolgozni, mint az egyesekkel.

A játékok és fejtörők révén lehet a legörömtelibb módon megszerezni a részekre bontás gyakorlatát. Ez a fejezet több mint ötven kedvcsináló gyakorlatot és játékot tartalmaz. Ezeket a feladványokat a tízes átlépésnek a II. részben tárgyalt technikájával együtt is alkalmazhatjuk. Eközben a gyerekek elfogadják játékszabályként, hogy nem szabad egyesével számolniuk.

* A *számlálás* és a *számolás* a matematikában két különböző jelentésű fogalom. A *számolás* általános fogalom matematikai műveletek elvégzésére vonatkozóan (hétköznapi értelemben is). A *számlálás* egy halmaz elemeinek többnyire egyesével való számbavétele úgy, hogy a halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a természetes számok halmazából a soron következőt. Az utoljára mondott szám a halmaz egészére vonatkozik, az adja meg a halmaz számosságát. (A lektor megjegyzése)

Az 1. fejezet a tanulás különböző szintjein állók számára közöl játékokat és feladványokat. A feladványok kétféle eszköztípussal gyakoroltatnak. Az egyik csoportba az úgynevezett diszkrét szemléltetőeszközök tartoznak (pl. a dominók, dobókockák), a másikba az úgynevezett „folytonos" eszközök (pl. a színes rudak). Vannak olyan feladatok is, amelyek tisztán elvont tevékenységet igényelnek, így papír és ceruza elegendő hozzájuk. Törekedjünk arra, hogy a gyerekek mindhárom eszköztípust használják. A nagyszámú és sokféle feladat lehetővé teszi, hogy – a már ismertek újrajátszása mellett – gyakran kezdjünk új játékba, így a gyakorlás nem válik unalmas ismételgetéssé.

A feladatokat egyedül vagy csoportban, az osztálytól elkülönülten is végezhetik azok a diákok, akiknek segítségre van szükségük az alapvető aritmetikai készségek és tudás elsajátításához, amelyek nélkül nem tudnának továbbhaladni.

A gyakorlatok tanórán kívüli szakkörökön is alkalmazhatók.

A fejezet „részekre bontós" játékainak áttekintése

A játék neve	A játékosok száma	Szükséges eszközök
Kinek a száma nyer?	2	4 pakli dominókártya* (fejenként 20 lap)
Bumm!	2	4 pakli dominókártya* (fejenként 20 lap)
Hol a párja? (memóriajáték)	2	2 pakli (összesen 20) dominókártya*
Sorakozó!	1, 2 vagy 3	fejenként 1 pakli dominókártya* (10 lap)
Három szomszéd	2	papír, ceruza, dobókocka
Dominó alapjáték	2 vagy több	28 darabos dominókészlet
Rakd sorba 1-től 10-ig!	1, 2 vagy 3	28 darabos dominókészlet
Hármasok és ötösök	2	28 darabos dominókészlet
A pötty körül	bármennyi	3 dobókocka
Tucatig	legfeljebb 5	3 dobókocka
Hármasával	2 vagy 3	3 dobókocka (vagy 10- vagy 20-oldalú „dobóka")
Páros vagy páratlan	2 vagy 3	3 dobókocka (vagy 10- vagy 20-oldalú „dobóka")
Elakadva a sárban	2 vagy 3	5 dobókocka
Háromféle	2 vagy 3	5 dobókocka
Kié az utolsó szó?	2	számrudak, 10-oldalú „dobóka"
Oszd háromfelé!	bármennyi	játékosonként 25 összeválogatott számrúd
Cseresznyeszedés	2	számrudak (vagy 10- vagy 20-oldalú „dobóka")
Rakd le!	2 vagy 3	számrudak, speciális dobókocka, papírtálca
Szedd fel!	2 vagy 3	számrudak, dobókocka, papírtálca
El a tízesekkel!	1	pakli kártya vagy számkártya*
Fel 11-re!	1	pakli kártya
Tizenhármasok és tizenötösök	1	pakli kártya
Egyszínű tizenöt	1	pakli kártya

Álló ászok	1	pakli kártya
Egyszemélyes piramis	1	pakli kártya
Foglyok	1	pakli kártya
Huszonegy	legalább 3	pakli kártya
Nullás	legalább 3	pakli kártya
Csukd be a dobozt!	2 vagy 3	pakli kártya vagy számkártya*, 2 dobókocka
Tízesek a bankban	2 vagy 3	1 vagy 2 pakli számkártya*
Menetelés	2	játéktábla*, számkártyák*, pörgettyű
Számbűvész	2	pakli számkártya*
Kivonás 15-ből	2	pakli számkártya*
Csökkentsd a különbséget!	2	pakli számkártya*, papír, ceruza
Növeld a különbséget!	2	pakli számkártya*, papír, ceruza
Plusz vagy mínusz	2	plusz–mínusz kártyák* a gyerekek által előkészítve
Bűvös négyzetek	bármennyi	papír, ceruza
Sudoku	bármennyi	különböző szintű sudoku-feladványok, ceruza

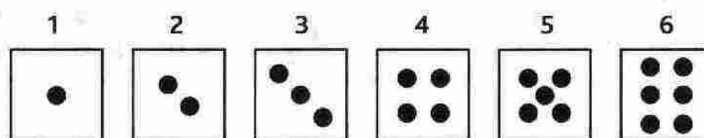
* Kinyomtatható az elektronikus *Mellékletből*.

A dobókockák és dominók mintái

Miért jók?

Ha dolgok, tárgyak egy csoportja túl sok elemű ahhoz, hogy egyetlen pillantással meghatározzuk a számukat, nem feltétlenül kell egyesével megszámolnunk azokat. Tekintetünkkel felismerhető mintákba csoportosíthatjuk az elemeket. A dobókocka és a dominó mintái éppen ilyenek: könnyen felismerhetők, és általában mindenki számára jól ismertek.

Az alábbi ábrán láthatók a dobókocka mintái. A 2 és a 3 pöttyei nemcsak átlósan, hanem függőlegesen és vízszintesen is elhelyezkedhetnek. Az ilyen kis mennyiségeket könnyen átlátjuk. A 4 feletti darabszámot azonban már csak akkor tudjuk egyetlen pillantással átlátni, megbecsülni, ha az felismerhető mintába rendeződik.



Ezeket a mintákat kiterjeszthetjük egészen 10-ig, páros számok esetén megduplázva, páratlanok esetén megfelelően (szomszédos mennyiségekből) társítva az imént látottakat. A páros minták két egyforma darabból állnak: a 8 például két 4-es mintából, nem pedig – mondjuk – egy 6-osból és egy 2-esből.

A számolási tevékenységek némelyike éppen ezeken a mintázatokon alapul.[2] A boltokban kapható társasjátékok jó részében dobókockát használunk; ezek szintén segítenek a becslés és a „pöttymintázat" felismerésének gyakorlásában. A következőkben leírt gyors és egyszerű kockajátékok némelyike az idősebb diákok számára is hasznos lehet.

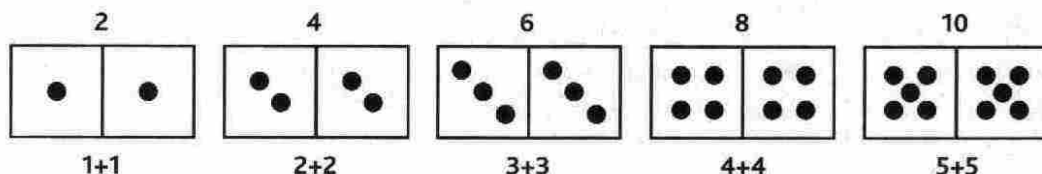
A felső tagozatos diákok azonban gyakran gyerekesnek találják a kockajátékokat, ezért esetükben javasolt a dominó használata. A dominó is sokféle tevékenységben és feladványban használható, ahogyan azt a következőkben bemutatjuk. A dominó különösen jól mutatja (egészen 12-ig) a számok két egyforma, illetve két szomszédos számra való felosztását, így jól hasznosítható nemcsak az egyesével, de még a kettesével való számláláson való túllépéshez is.

Gyakorlat

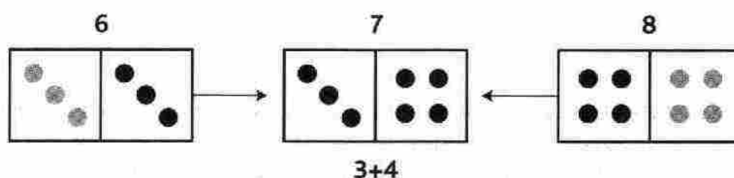
Készítsünk dominó mintázatú kártyákat a számokhoz (1-től 10-ig)

A diákok először a páros számokhoz készítsenek dominókártyákat (10-ig), két egyforma mintából. A megfelelő (1:2 oldalarányú) kartonpapír téglalapokat osszák fel két egyforma négyzetre, és ragasszanak vagy rajzoljanak ezekbe pöttyöket.

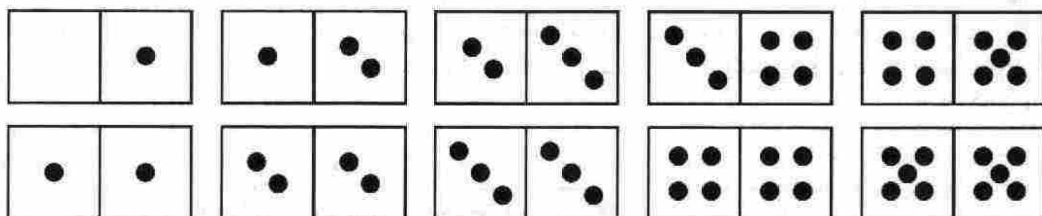
Kétféleképpen is meg kell tudniuk nevezni az ábrázolt mintát: egyrészt az összes pötty számával, másrészt egy kéttagú összeggel. Például az alábbi ábrasor utolsó tagja egyrészt „10", másrészt „5 meg 5".



Ezután készítsék el a páratlan számok kártyáit (10-ig) úgy, hogy az adott páratlan szám két páros szomszédját adó kártya dupla mintázatából átmásolnak egyet-egyet. Például a 7-est úgy készítsék, hogy tegyék az új kártyát a már kész 6-os és 8-as közé, és mindkét mezőjébe a szomszédos négyzet mintáját másolják át, esetünkben 3+4 pöttyöt.



A diákok először mind az öt páros számra készítsék el a kártyákat, azután az öt páratlanra.



A kártyák kinyomtathatók a kötet letölthető elektronikus *Mellékletéből*, de a tanulókat már az is fejleszti, ha saját maguk készíthetik el azokat.

Játékok a dominókártyákkal

A következő játékok közül kettőt mindegyik játékos egy-egy paklival (10 lappal) játszhat. Más játékokhoz viszont játékosonként két pakli szükséges.

Kinek a száma nyer?

Két játékos játssza, fejenként két pakli (azaz 20 lap) dominókártyával.

Szabályok: Mindkét játékos megkeveri és pöttyökkel lefelé fordítja a lapjait. Egy-egy lapot fordítanak fel egyszerre, és mindketten hangosan bemondják a lapjukon lévő pöttyök számát (az összeget). Akinek a száma nagyobb, elviszi mindkét lapot. Ha a számok egyenlőek, a kártyák felfordítva az asztalon maradnak, és a következő kör győztese viszi el őket. Az győz, aki több lapot gyűjt be.
Változat: Az alacsonyabb szám nyer.

Bumm!

Két játékos játssza, fejenként két pakli (azaz 20 lap) dominókártyával.

Szabályok: Mindkét játékos megkeveri és pöttyökkel lefelé fordítja a lapjait. Egy-egy lapot fordítanak fel egyszerre. Ha a két kártyán megegyezik a pöttyök száma, az a játékos viszi el mindkettőt, aki előbb mondja ki: bumm! Az győz, aki több lapot gyűjt be.

Hol a párja? (memóriajáték)

Két játékos játssza, fejenként két pakli (azaz 20 lap) dominókártyával.

Szabályok: A két játékos megkeveri és pöttyökkel lefelé fordítja az összes lapot, elkeverve kettejük paklijait. Az egyik felfordít két tetszőleges lapot, hogy a másik is lássa, és hangosan felolvassa a rajtuk látható számokat (a pöttyök összegét). Ha ezek megegyeznek, a játékos elviszi ezeket a lapokat, és újra ő következik. Ha a felfordított számok nem egyeznek meg, a játékos az eredeti helyükön visszafordítja a lapokat, és a másik játékos következik. Az győz, aki több lapot gyűjt be.

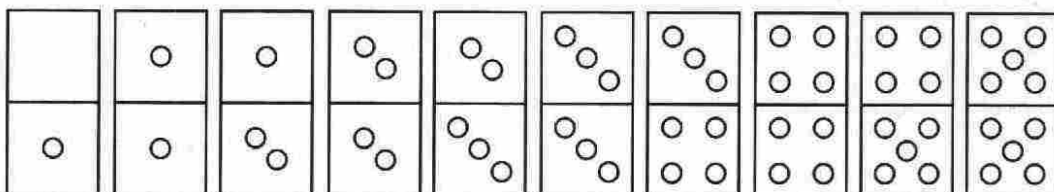
Sorakozó!

Két vagy három játékos játszhatja, fejenként egy paklival (10 lappal). Játszható egyedül is (úgy, mint a „pasziánsz"); ekkor az a cél, hogy minél jobb eredményt érjen el a játékos.

Szabályok: A játékosok megkeverik paklijukat. A felső öt kártyát megfordítják, és növekvő sorba rendezik az asztalon. A cél: észrevenni, hogy hány kártya mutat szomszédos számokat. Aki négy szomszédos számot talál, 2 pontot kap, aki öt szomszédosat, 10 pontot. Az győz, akinek öt menet után a legtöbb pontja van.

Három szomszéd

Kockás papírra mindkét játékos lerajzol egy pakli sorban lévő dominót úgy, hogy a pöttyök üres karikák legyenek, mint az ábrán. (Ne használjunk kész rajzot, hiszen a dominók megrajzolása is elősegíti a minták megjegyzését.)



Szabályok: A játékosok kockadobással játszanak. Aki 6-ost dob, kimarad a körből. Minden más eredmény esetén a játékos besatírozhatja a papírján az egyik olyan fél-dominó pöttyeit, amely egyezik a kocka által mutatott mintával. Ha például 4-est dob, beszínezheti a 8-as dominó egyik felét, vagy a 7-es vagy a 9-es dominó megfelelő felét (vagyis a pöttyöket). Az győz, akinek bármely három szomszédos dominóján először telik be minden pötty.

Játékok teljes dominókészlettel

A legegyszerűbb dominókészlet 28 darabból áll, a dupla nullástól a dupla hatosig, a kettő között minden lehetséges számpárosítással.

Kinek a száma nyer?, Bumm!, Hol a párja?, Sorakozó!

Ez a négy, az előbbiekben ismertetett játék nemcsak a 10 dominókártyával, hanem a teljes készlettel is játszható. A kártyákkal játszva a gyermek a két egyforma, illetve két szomszédos minta felismerésére (azaz számra bontásra) összpontosít. A teljes készlettel való játék az egyéb bontásokat gyakoroltatja.

Dominó alapjáték

Ez a hagyományos dominójáték, két vagy több játékossal, a teljes 28 darabos készlettel. A dominókat összekeverve, pöttyökkel lefelé fordítva tesszük az asztalra.

Szabályok: Minden játékos „nyolc mínusz a játékosok száma" darab dominót húz. Az kezd, akinek a legmagasabb értékű dupla dominója van. A dominókat egyenes vonalban kell lerakni úgy, hogy az érintkező mezőkön ugyanannyi pötty legyen. Ha valaki nem tud tenni, addig kell húznia a még az asztalon lévő dominókból, ameddig egyet le nem tud rakni. A játék véget ér, ha valamelyik játékos az összes dominóját lerakta, vagy ha már senki nem tud tenni. Az első esetben a többiek kezében maradt dominók számát a győztes felírja pontként. Az nyer, akinek három vagy öt játszma után a legtöbb pontja van.

Változatok: A játszma végén minden játékos rosszpontként könyveli el a kézben maradt dominókon lévő pöttyök számát. Az győz, akinek három vagy öt játszma után a legkevesebb (rossz)pontja van. Egy további közismert változat, hogy ha valaki dupla dominót rak, az tehet még egyszer. Egy másik, hogy (kettő vagy négy játékos esetén) kezdetben az összes dominót kiosztják.

Rakd sorba 1-től 10-ig!

Két vagy három játékos játszhatja a teljes 28 darabos dominókészlettel. Játszható egyedül is; ekkor az a cél, hogy a játékos minél jobb eredményt érjen el. A dominókat összekeverve, pöttyökkel lefelé fordítva tesszük az asztalra.

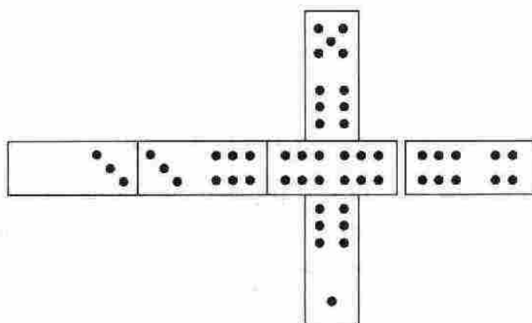
Szabályok: A játékosok sorban húznak egy-egy dominót, és mindegyikük megpróbál a sajátjaiból kirakni egy teljes sort 1-től 10-ig – a dominón lévő pöttyök összege alapján. Az győz, akinek ez először sikerül (a legkevesebb húzásból, dominóból). Játszhatjuk úgy is, hogy mindenki addig húz, amíg sikerül kiraknia a teljes sort. Az nyer, akinek öt játszma során összesen a legkevesebb dominóra volt szüksége.

Hármasok és ötösök

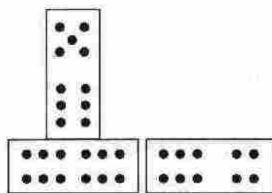
Ebben a hagyományos dominójátékban két játékos játszik a teljes 28 darabos készlettel. A dominókat összekeverve, pöttyökkel lefelé fordítva tesszük az asztalra.

Szabályok: Mindkét játékos hét dominót húz. Az kezd, akinek magasabb értékű dupla dominója van. Ezt elsőként lerakja, és ettől a dominótól mindkét hosszanti irányba, vagy a közepével érintkezve, rá merőlegesen lehet lerakni a következő dominókat felváltva úgy, hogy az érintkező mezőkön ugyanannyi pötty legyen. Ha valaki nem tud tenni, húznia kell egy újabb dominót (ha ekkor sem tud tenni, legfeljebb még egy darabot). Ha ekkor már tud tenni, tennie kell, ha nem, csak a dominói száma növekedett. Lehetőleg úgy tegyünk le dominót, hogy a kereszt négy végén lévő számok összege 3-mal vagy 5-tel osztható legyen. Ha ez sikerül, a hányadost (az összeg 3-mal vagy 5-tel való osztásának eredményét) a játékos pontként megszerzi (felírja). A játék véget ér, ha valakinek elfogynak a dominói. A másik játékos a nála maradt dominók pöttyeinek számát levonja az addigi pontszámából. Az győz, akinek több pontja van.

Például a bal oldali ábrán az előző játékos a 6/1 dominót rakta le, így 4 pontot szerzett (mert a végek összege 1+0+5+6=12 és 12:3=4). A következő játékos a 6/4 dominót teszi le, így 2 pontot kap (mert 4+1+0+5=10, és 10:5=2). A jobb oldali ábrán a 6/4 dominó elhelyezésével a játékos 8 pontot szerez (mert 4+6+5=15, ami 3-mal és 5-tel is osztható; 15:3=5 és 15:5=3, ezért mindkét pontszámot begyűjti).



Ebben az állásban öt dominó már le van rakva.
Az utoljára tevő játékos 4 pontot szerzett (mert 12:3=4).
A soron következő játékos a 6/4 dominót teszi le
a sor jobb szélére, így 2 pontot kap (mert 10:5=2).



A 6/4 dominó elhelyezésével ebben
az állásban a végek összege 15 lesz,
tehát a játékos
8 pontot szerez (15:3 + 15:5).

Kockajátékok

A következő hat játék közül öt az összeadást gyakoroltatja. A játékosok nem számolhatják össze egyesével a pontszámaikat sem az ujjaikon, sem fejben, mert ezzel a játékkal éppen erről szeretnénk leszoktatni őket.

A pötty körül

Akárhány játékos játszhatja ezt a hagyományos kockajátékot három dobókockával.

Szabályok: A játékosok sorban dobnak, a három kockával egyszerre. A játék neve („a pötty körül") azokra a mintákra utal, amelyek egy központi pötty körül csoportosulnak, azaz a páratlan számokra. Az 5-ös dobás 4 pontot ér (mert 4 „szirom" övezi a középső pöttyöt), a 3-as 2-t – de az 1-es is ér 1 pontot. A játékosok folyamatosan, fejben adják hozzá eddigi pontszámukhoz az újat. A páros eredményű dobások nem érnek pontot, de ha mindhárom kocka párosat mutat, a játékos az előző körbeli pontszáma dupláját kapja. Négy kör után véget ér a játék. Az a játékos nyer, akinek a legtöbb pontja van.

Tucatig

Ezt a hagyományos kockajátékot legfeljebb öt játékos játszhatja, három dobókockával.

Szabályok: Minden játékos felírja egy papírra a számokat 1-től 12-ig. A játékosok sorban dobnak a három kockával egyszerre. Az egyik kocka által mutatott számot vagy két kocka által mutatott szám összegét kihúzhatják a papírjukról, akár több számot is egyszerre – de csak sorban. Tehát egy számot csak akkor húzhatnak ki, ha már az összes előző szám ki van húzva. Például az elsőre dobott 2, 3, 6 esetén a játékos nem húzhat ki semmit; viszont az 1, 2, 3 dobás esetén kihúzhatja mindhármat. Az győz, aki először húzza ki minden számát.

Változat: Egy elterjedt változat szerint előbb 1-től 12-ig növekvő sorban kell kihúzni a számokat, majd visszafelé 12-től 1-ig csökkenő sorban. Ebben a változatban, ha a növő sor 11-esének kihúzása után a játékos tripla 6-ost dob, mindkét 12-esét kihúzhatja egyszerre.

Hármasával

Ebben az egyszerű kockajátékban két vagy három játékos játszik három dobókockával.

Szabályok: Először minden játékos egyszerre dob három kockával. A legnagyobb számot mutató kockát az asztalon hagyja, és a másik kettővel újra dob. A nagyobb számot mutatót megint otthagyja, és egy kockával újra dob. Az így kapott három szám összegét feljegyzi, majd a következő játékos jön. Az nyer, akinek öt kör után a legtöbb pontja van.

Változat: Ha a nagyobb számok összeadását szeretnénk gyakoroltatni, használjuk a 10- vagy 20-oldalú speciális „dobókákat" (akár mindkettőt egyszerre).*

* Ezek a magyar kereskedelmi forgalomban is kaphatók, viszont csak speciális boltokban vagy interneten rendelve. www.fantasybolt.hu (A ford. megjegyzése)

Páros vagy páratlan

Egyszerű összeadós játék két vagy három játékosnak, négy dobókockával.

Szabályok: A játékosok sorban dobnak, mindegyikük egyszerre mind a négy kockával. Dobás előtt be kell jelenteniük, hogy „páros"-t vagy „páratlan"-t választanak. A négy kocka által mutatott pontok közül csak ezeket számíthatják be az eredményükbe. Az nyer, akinek öt kör után a legtöbb pontja van.

Változat: A nagyobb számok összeadásának gyakorlására használhatunk 10- vagy 20-oldalú dobókákat is (akár mindkettőt egyszerre).

Elakadva a sárban

Ezt a hagyományos kockajátékot két vagy három játékos játszhatja, öt dobókockával.

Szabályok: A kezdő játékos mind az öt kockával dob. Az 1-est vagy 2-est mutató kockát vagy kockákat kihagyja a folytatásból: ezek „elakadtak a sárban". A többi kocka által mutatott számokat összeadja, és ezekkel a kockákkal újra dob. Ezt addig folytatja, amíg mind az öt kocka „el nem akad a sárban". A szerzett pontokat fejben összeadja és feljegyzi. Ezután jön a következő játékos, aki ugyanezekkel a szabályokkal dob. Az győz, akinek öt kör után a legtöbb pontja van.

Háromféle

Ezt az összeadós-szorzós játékot két vagy három játékos játszhatja, öt dobókockával.

Szabályok: A játékosok sorban dobnak, az öt kockával egyszerre. Aki három egyforma számot dob, az ezek összegét megkapja pontként. Négy egyforma szám esetén nemcsak a számok összegét kapja meg, hanem további 5 pluszpontot is. Öt egyforma szám esetén a számok összegét és 10 pluszpontot. Az győz, akinek tíz kör után a legtöbb pontja van. Mivel sok dobás egyáltalán nem hoz pontot, abban is megállapodhatunk, hogy a játék csak akkor ér véget, ha valamelyik játékosnak legalább öt eredményes (pontot hozó) dobása volt már.

Színes rudak

Miért jók?

Bár a dobókockák és a dominók mintázata jól alkalmazható a részekre bontás vizuális felismerése és gyakorlása terén, a pöttyökből álló minták mind külön egységekből állnak. Ezek túlzott használata szükségszerűen csak megerősíti a gyermekben a számokról mint egyesével felépülő mennyiségekről való gondolkodást, pedig éppen ez az, amin túl kellene jutnunk. A számrudak viszont minden egyes 1 és 10 közötti számot önálló egységként mutatnak. A hetes számot képviselő fekete rúd* például nemcsak

* Ilyen készletek nálunk is kaphatók, sőt általánosan elterjedtek, de a sokféle gyártó miatt nem egységes a színezésük. Így a fordítás során inkább a rudak jelezte számértéket adtam meg, és csak zárójelben a színeket. Ahol mégis szükséges volt, ott az alábbi (talán legáltalánosabban elterjedt) „kódolást" használtam: 1 – fehér, 2 – rózsaszín, 3 – világoskék, 4 – piros, 5 – sárga, 6 – lila, 7 – fekete, 8 – bordó, 9 – sörérkék, 10 – narancssárga, 12 – zöld, 16 – barna. (A ford. megjegyzése)

úgy értelmezhető, mint hét darab egyes „összege", hanem önálló egységként is, „saját jogán", mint egy darab hetes.

A színes rudakat magam rendkívül hasznosnak tartom. Sok „aha-élmény" kötődik hozzájuk, amikor a dolgok egyszer csak a helyükre kerülnek a gyermek fejében. A többi szemléltetőeszközhöz hasonlóan a rudakat se használjuk soha pusztán mechanikusan egy eredmény kiszámolására, sokkal inkább az aritmetikai gondolkodás modellezésére. A rudak nagy segítséget nyújthatnak az alapvető számfogalmak kialakításában.[3] A színes rudakról rövid ismertetés olvasható az elektronikus *Mellékletben*.

Játékok a színes rudakkal

Az alább ismertetett hat játék mindegyike egy készlet számrúddal játszható. A Magyarországon kereskedelmi forgalomban kapható készlet két játékos számára bőven elegendő.

Kié az utolsó szó?

Ketten játszhatják. A játék nemcsak azt tanítja meg, hogyan lehet egy számot két részre bontani, hanem azt is, hogy erre csak véges számú különböző lehetőség van. Ez különösen szembetűnő kis számok esetén. Például a 2 és a 3 is csak egyféleképpen bontható fel: 2=1+1 és 3=1+2.

Szabályok: A játékos egy 10-oldalú dobókával dob, és a dobott számot jelképező rudat kiteszi az asztalra. Ezután a játékosok felváltva kiteszik, felépítik ugyanezt a számot két részből, két rúdból összerakva. (Ha a dobás 1, újra kell dobni.) Az eredetileg dobó játékos tesz elsőként. Páros szám esetén két egyforma, páratlan esetén két szomszédos számból kell felépítenie az összeget. A rudakat mindig szorosan, pontosan a másik mellé (alá) kell rakni, és közben hangosan megnevezni az alkalmazott bontást.

Például:

A 7-es dobás után a dobó játékos kiteszi a 7-es (fekete) rudat, és mellé (alá) helyezi hosszában a 3-as (világoskék) és a 4-es (piros) rudat, miközben azt mondja: „3 meg 4 az 7".

A másik játékosnak két újabb rúddal egy másik bontást kell kiraknia. (A 4+3 ugyanaz, mint a 3+4, ez nem számít másik lehetőségnek.) Addig játszanak, amíg a következő játékos már nem tud új sort kirakni – vagy azért, mert nem tudja jól felbontani a számot, vagy mert már elfogytak a lehetőségek. Az a játékos, akié „az utolsó szó" (bontás, megoldás) volt, az utolsó rúdpárt (az általa kitett bontást) elteszi a játék végéig. Megegyezés szerinti számú kör után az győz, akinek a rúdjai (a rudak által jelzett számok) összeadva nagyobb értékűek.

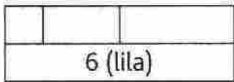
Változat: Használhatunk két hagyományos dobókockát, és építhetjük a számokat 12-ig, vagy építkezhetünk két 10-oldalú (vagy egy 20-oldalú) dobókával 20-ig. Ekkor is a két egyforma vagy szomszédos számra bontással kell kezdeni a kirakást, és nem a kockák által mutatott bontással.

Oszd háromfelé!

Ez a játék a számok három részre osztását gyakoroltatja. Bármekkora csoport játszhatja, időre. Minden játékosnál legyen négy-négy darab 1-es, 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös (fehér, rózsaszín, világoskék, piros és sárga) rúd, valamint egy-egy darab a másik öt színű (6-os, 7-es, 8-as, 9-es, 10-es) rúdból, mint felbontandókból. Más rudak nem lehetnek a játékosoknál. Mindenkinek szüksége lesz továbbá egy „paravánra" (ez lehet egy nagyobb könyv, dosszié, kartonlap stb.), amely mögött elkészíthetik a saját megoldásukat anélkül, hogy azt a többi játékos elleshetné.

A játék lényege, hogy ki bontja fel leggyorsabban a 6 és 10 közötti öt szám mindegyikét három részre, azaz ki rak ki az öt számrúd mindegyike mellé három megfelelőt a rendelkezésére álló kisebb rudak közül.

Jóval nehezebb a feladat azzal a megkötéssel, hogy minden számot három különböző összetevőre kell bontani (vagyis három különböző színű rúdból kell felépíteni). A játékosok hamar rá fognak jönni, hogy a 6 és a 7 esetén egyetlen megoldás van a három különböző részre bontásra. A 8, 9 és 10 esetén már hosszabb próbálkozást igényel a helyes megoldás megtalálása.

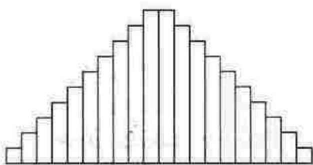




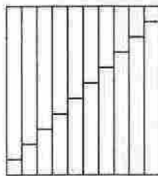
A 6 és a 7 csak egyféleképpen bontható fel három különböző összetevőre.

Cseresznyeszedés

Ez a kétszemélyes játék az egyjegyű számok tetszőleges kisebb részekre bontását gyakoroltatja. A kezdő játékos előnyben van, ezért külön meg kell mérkőzni a kezdés jogáért (például kockadobással). Kezdés előtt a játékosok méret szerint rendezzenek el minden színből két-két rudat a tartódoboz fedelében, amelyet a két játékos között helyezzenek el. A rudakat mindkettejük számára kézre esően, egymás mellett ülő játékosok esetén kettős lépcsősor formában, egymással szemben ülők esetén fal formában rendezzék el.



kettős lépcsősor formába rendezett rudak



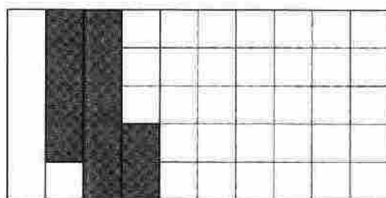
fal formába rendezett rudak

Szabályok: A játékosok egy 10-oldalú dobókával dobnak felváltva. A doboztetőből kivett rudakkal – az azok által képviselt számok összegeként – kell előállítaniuk a dobott számot. A felhasznált rudak száma jelenti a megszerzett pontokat, hosszuktól, értéküktől függetlenül. Ha valaki nem tudja kirakni a még meglévő rudakból a dobott számot, a másik játékos következik. Ha egymás után háromszor egyik játékos sem tud tenni, a játék véget ér. Az győz, akinek négy játszma után összesítésben több pontja van.

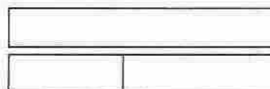
Rakd le!

Ez a két- vagy háromszemélyes játék az ötnél nagyobb számok kis részekre bontását gyakoroltatja. Mindegyik játékos rajzoljon egy papírlapra egy 5×10 cm-es téglalapot, 1 cm-es négyzetekre felosztva. Az ábra körül körben hagyjanak egy 0,5–1 cm-es margót, ami mentén kivágva a rajzot, majd a margót felhajtva egy 5×10 cm-es papírtálcát kapnak, keskeny peremmel.
Kartonból vagy műanyagból masszívabb pálya készíthető. Készíthetünk csak keretet is: habszivacsba vagy hungarocellbe 5×10 cm-es lyukat vágunk, és beletesszük a megrajzolt pályát.

Szabályok: A játékosok szabályos hatoldalú dobókockával dobnak, amelyet azonban a 6-tól 11-ig terjedő számokkal kell feliratozni (például ragasztós címkékkel). A játékosnak az általa dobott számot a lehető leghatékonyabban – azaz a legkevesebb rúdból – kell kiraknia úgy, hogy végül a teljes 5×10-es mezőt lefedje. A rövidebbik oldallal párhuzamosan kell lefektetni a rudakat, és a játékos csak akkor kezdhet új oszlopot, ha az előző már teljesen betelt. Például: ha a kezdő dobás 6, akkor azt 5+1 módon kell felbontani (sárga és fehér rúd), az ezután dobott 11-et pedig 4+5+2 módon, az ábra szerint. Ha valaki nem tudja a kívánt módon kirakni a dobott számot, a következő játékos jön. Az győz, aki először kitölti az egész játékteret rudakkal – az utolsó dobásnak azonban pontosnak kell lennie, vagyis – akár több körön át próbálkozva – csak akkor végzünk, ha pont annyit dobunk, mint amekkora betölthető hely még üresen van.



Az állás két dobás után:
az első 6, a második 11 volt.



Ha a harmadik dobás 7,
azt 3+4 módon kell felbontani

Változat: A játék 11-től 16-ig felcímkézett kockával zajlik, 10×10 cm-es pályán. Eltekinthetünk az utolsó pontos dobás szabályától is: dobhatunk nagyobbat is, mint amennyi a kitöltendő hely.

Szedd fel!

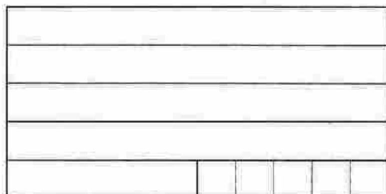
Ez a két- vagy háromszemélyes játék a kivonásra épül. A tízesek egyesekre, illetve az egyjegyű számok kisebb részekre bontását gyakoroltatja. A játékosok készítsenek egy 5×10 cm-es papírtálcát, az előző játéknál leírt módon.

Szabályok: A játékosok kezdésként öt darab 10-es (narancssárga) rúddal töltsék ki a saját tálcájukat. Hagyományos (kocka alakú, 1-től 6-ig számozott) dobókockával dobva, a dobott számnak megfelelő rudat sorban le kell emelniük a játéktérről. Ehhez persze fel kell bontaniuk a tízeseket, de csak a megfelelő méretű (felveendő és lent hagyandó) rudakra, nem pedig egyszerű egyesekre (csupa fehér kockára).

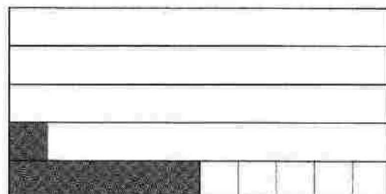
(Folytatódik)

(Folytatás)

Például: ha az első dobás 3, az első narancssárga rudat 3+7 módon kell felbontani, hogy a hármast el tudjuk távolítani. (Ez a részekre bontást gyakoroltatja.) Ha a következő dobás 2-es, a 7-es (fekete) rudat fel kell bontani 2+5-re, hogy a kettest fel tudjuk venni. Ha ezután 6-ost dobunk, azt előbb fejben fel kell bontani 5+1 módon, majd a következő sor 10-es (narancssárga) rúdját tevőlegesen fel kell bontani 1+9-re, hogy a dobott 6-ost két darabban távolíthassuk el (5+1). Az győz, akinek a tálcája előbb kiürül. Az utolsó dobásnak pontosnak kell lennie, vagyis – akár több körön át próbálkozva – csak akkor végzünk, ha pont annyit dobunk, mint amekkora értékű rúd még lent van.



A játék állása, ha elsőre 5-öst dobunk.



Ha a következő dobás 6-os, a rudak (5+1) felszedése előtt a második sor 10-es rúdját fel kell bontani.

Változat: 2×10-es vagy 3×10-es pályán (vagy akár az eredeti pályára csak 2 vagy 3 narancsságra rudat lerakva) a játék rövidebb. Eltekinthetünk az utolsó pontos dobás szabályától is: dobhatunk nagyobbat is, mint amekkora a még felveendő rúd.

Kártyajátékok

Részekre bontós játékok kártyával

Ebben a részben 16 kártyajáték szerepel. Az első hét a pasziánszhoz hasonlítható, egyedül játszandó „türelemjáték". Ezek hagyományos pakli (francia) kártyával játszhatók, csakúgy, mint a nyolcadik, kilencedik és tizedik.

A többi hat játék az általános számolási nehézségek leküzdését célozza, és számkártyákkal játszható. Mivel a kereskedelmi forgalomban kapható kártyákon általában nehéz megkülönböztetni a 6-ost és a 9-est, *Melléklet*ünk ilyen kinyomtatható készletet is tartalmaz.

A játékosok nem számolhatnak egyesével (az ujjukon vagy másképp) a játék folyamán. Az itt bemutatott játékoknak az a céljuk, hogy a diákok a részekre bontást, a számok használatát gyakorolják.

El a tízesekkel!

Ez az egyszemélyes játék a 10 kiegészítő párjainak gyakorlását segíti elő. (Egy hagyományos angol játék, a „Tisztítsd le az asztalt!" egyik változatáról van szó.) A neve „El a tízesekkel!", mert a tízeseket kell benne felbontani (illetve lásd alább az egyéb változatokat). Hagyományos pakli (francia) kártyával játszható, amelyből a figurás lapokat és a 10-eseket ki kell venni (az ász 1-et ér). Játszható másfajta számkártyákkal is: négy-négy darab 1-től 9-ig számozott lapra van szükségünk.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Szabályok: Az összekevert pakliból felfordítva, 3×3-as mintába rendezve ki kell rakni kilenc lapot. Fel kell venni közülük az olyan lappárokat, amelyeknek az összege 10, és a helyükbe új lapokat kell letenni a pakliból. A felvett lapokon található kiegészítő párokat hangosan meg kell nevezni; például: „hét meg három az tíz". A játékos akkor „győz", ha a pakli összes kártyáját fel tudja venni páronként.

Változat: A 10 helyett más (kisebb) „célszámmal" is játszható a játék. Ekkor a célszámot és az annál nagyobb lapokat ki kell venni a pakliból, és a célszámnál eggyel kevesebb lapot kell kitenni a kezdéshez. Például a 7-es bontásainak gyakorlásához négy-négy darab 1-től 6-ig számozott lap szükséges, és hat lap kirakásával kezdődik a játék.

Fel 11-re!

Ez az egyszemélyes játék a 11 részekre bontását gyakoroltatja. Egy pakli (francia) kártyával játszható, amelyből a figurás lapokat (bubi, dáma, király) ki kell venni. Az ász 1-et ér.

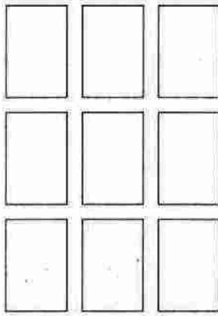
Szabályok: Az összekevert pakliból felfordítva, 3×3-as elrendezésben ki kell rakni kilenc lapot. Fel kell venni közülük az olyan lappárokat, amelyeknek az összege 11, és a helyükbe új lapokat kell letenni a pakliból. A felvett, 11-es összegű számpárokat hangosan meg kell nevezni. A játékos akkor „győz", ha a pakli összes kártyáját fel tudja venni páronként.

Tizenhármasok és tizenötösök

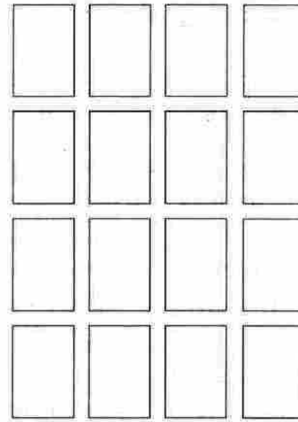
Ez az egyszemélyes játék a 13 és a 15 részekre bontását gyakoroltatja, és inkább az utóbbi felépítését célozza. A játékban a bubi 11-et, a dáma 12-t, a király 13-at ér; az ász érhet 1-et és 14-et is.

Szabályok: Az összekevert pakliból felfordítva, 3×3-as elrendezésben ki kell rakni kilenc lapot. Fel kell venni közülük az olyan lappárokat, amelyeknek az összege 13 vagy 15 (a királyra speciális szabály vonatkozik, lásd alább), és helyükbe új lapokat kell letenni a pakliból. Külön kupacba gyűjtsük a 13-as és a 15-ös párokat – például balra és jobbra.

A király önmagában, pár nélkül felvehető és a 13-as kupacba tehető; vagy egy 2-essel párban a 15-ösbe. Két ász együtt 15-öt ér. A játékos akkor „győz", ha a pakli összes kártyáját fel tudja venni páronként, és a 15-ös kupacban több kártyája van, mint a 13-asban.



A kártyák kirakása az El a tizesekkel!, Fel 11-re!, Tizenhármasok és tizenötösök játékokban



A kártyák kirakása az Egyszínű tizenöt és Álló ászok a játékokban

Egyszínű tizenöt

Ez az egyszemélyes játék a 15 részekre bontását gyakoroltatja. Egy pakli (francia) kártyával játszható, amelyből a négy darab 10-est ki kell venni. Az ász 1-et ér.

Szabályok: Az összekevert 48 lapos pakliból 4×4-es elrendezésben, felfordítva ki kell rakni tizenhatot. Fel kell venni közülük tetszés szerinti számú, de egyszínű lapot, amelyek összegül 15-öt adnak, és hangosan ki is kell mondani az összeadást. A felvett lapok helyébe új lapokat kell letenni a pakliból. Ha egy bubi, egy dáma és egy király van egyszerre a kirakott lapok között, azokat színtől függetlenül fel lehet venni. A játékos akkor „győz", ha a pakli összes kártyáját ki tudja rakni és fel tudja venni.

Változat: Nehezíti a játékot, ha a bubi–dáma–király hármas is csak akkor vehető fel, ha egyszínűek. Könnyítés, ha ezeket a figurás lapokat a 10-esekkel együtt kezdés előtt kivesszük a pakliból.

Álló ászok

Ez az egyszemélyes játék a 10-nél kisebb számok összeadását gyakoroltatja. Egy pakli (francia) kártyával játszható, amelyből a dámákat és a királyokat ki kell venni. A bubi 11-et ér.

Szabályok: Az összekevert pakliból 4×4-es elrendezésben, felfordítva ki kell rakni tizenhat lapot. Az ászokat nem szabad felvenni. A többi lap közül bármely egyszínű pár felvehető, amely egy sorban vagy egy oszlopban van. Fejben össze kell adni a lapokon szereplő számokat, és hangosan ki kell mondani az összegüket. A felvett lapok helyébe új lapokat kell letenni a pakliból. A játékos akkor „győz", ha a pakli összes kártyáját ki tudja rakni, és csak a négy ász marad az asztalon.

Változat: Mivel a játék vége felé egyre nehezebb felvenni a lapokat, megállapodhatunk abban is, hogy bizonyos számú lap – az ászok mellett – az asztalon maradhat. Az újabb és újabb játékokban próbáljunk egyre kevesebb lapot az asztalon hagyni.

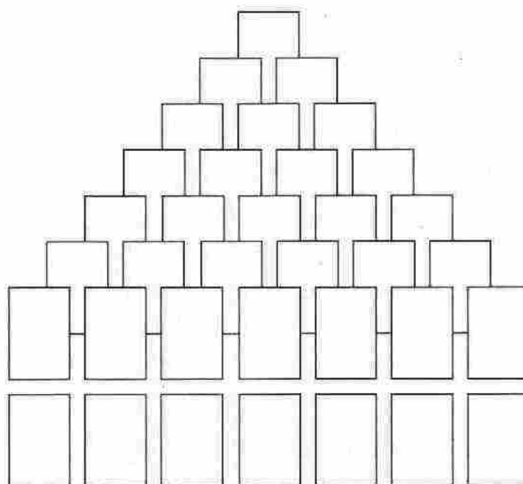
Egyszemélyes piramis

Ez az egyszemélyes kirakós játék a 13 részekre bontását gyakoroltatja. Egy pakli (francia) kártyával játszható. A bubi 11-et, a dáma 12-t, a király 13-at, az ász 1-et ér.

Szabályok: Az összekevert pakliból piramis formában (lásd az ábrát), felfordítva ki kell rakni 28 lapot, lefelé haladva fedésben rakva a kártyákat. Az alsó sor alá ki kell rakni további 7 lapot, de úgy, hogy ne fedjék egymást. A pakli többi része maradjon kézben. Csak azok a lapok „vannak játékban", amelyeket nem fed másik lap (tehát kezdetben az alsó két sor lapjai).

A játékban lévő lapok közül keressünk 13-as összegű párokat. Ezeket és a királyokat – amelyek önmagukban 13-at érnek – vegyük fel a piramisból, és tegyük félre. Eközben hangosan mondjuk ki a megfelelő összeadást. Ha nincs több felvehető kártya, a kézben maradt pakli felső lapját csapjuk fel, és keressünk hozzá párt a játékban lévő lapok közül. Ha nem találunk, ezt az új lapot számmal felfelé tegyük félre egy „tartalék" kupacba (talonba), ahol mindaddig „játékban marad", amíg nem kerül rá újabb lap. Ha a kézben maradt pakli összes lapja kiment, a talont felvehetjük, és egyszer újra végigvehetjük a lapjait.

A játékos akkor „győz", ha a piramis összes kártyáját fel tudja venni.



A kártyák kirakása az Egyszemélyes piramis játékban

Foglyok

Ez az egyszemélyes játék a 11, 12 és 13 részekre bontását gyakoroltatja. Egy pakli (francia) kártyával játszható, amelyből az ászokat, 2-eseket és 10-eseket kivettük. A bubi 11-et, a dáma 12-t, a király 13-at ér.

Szabályok: Vegyük ki a pakliból a figurás lapokat, és felfordítva helyezzük őket egy sorba úgy, hogy maradjon még alattuk hely. Ezek tizenketten a foglyok, akiket a játék során ki kell szabadítani. A többi lapot keverjük össze. A foglyok alá felfordítva rakjunk ki hat lapot – ezek lesznek játékban.

Egy fogoly úgy szabadítható ki, ha a játékban lévő hat lap között találunk kettőt, amelyek összege megegyezik a fogoly értékével. Tehát egy bubi két olyan lappal szabadítható ki, amelyek összege 11, egy dáma 12-vel, egy király 13-mal. Ha van ilyen lehetőség, a „fogoly" lapot és a megfelelő párt vegyük fel, tegyük félre. A pakliból két új lapot tegyünk le az alsó sorba, hogy ismét hat lap legyen játékban. A játékos akkor „győz", ha az összes foglyot ki tudja szabadítani.

Huszonegy

Három vagy több játékos játszhatja ezt a hagyományos játékot (amely angol nyelvterületen blackjack néven is ismert). Egyikük az osztó, ez a szerep „körbemegy".

Szabályok: Az osztó megkeveri a paklit, és minden játékosnak oszt két lapot. Ezeket a játékosok nem mutathatják meg egymásnak. A játékosok célja, hogy a lapjukon lévő számok összege a lehető legnagyobb legyen, de ne haladja meg a 21-et. Az ász 1-et vagy 11-et ér, a figurás lapok mind 10-et.*

Az osztó sorban megkérdezi a játékosokat, kérnek-e harmadik lapot. A játékosok „kérek" vagy „elég" választ adhatnak. Akinek az összege meghaladja a 21-et, „fuccs"-ot mond, és bedobja a lapjait. Negyedik, ötödik és további osztási körök lehetségesek, mindaddig, amíg az összes játékos „elég" választ ad vagy befuccsol. Ezután a játékban maradtak sorban megmutatják a lapjaikat.

Ha az osztó befuccsol, a még versenyben lévő játékosok kapnak 1 pontot. Egyébként a játékban maradtak közül az kap pontot, aki a legközelebb van a 21-hez (holtverseny esetén többen is).

Nullás

A fent leírt huszonegy (vagy blackjack) egyik változata. A fő szabályok ugyanazok, de a figurás lapokat kivesszük a pakliból, és minden játékos legfeljebb öt lapot kaphat. A fekete lapok pozitív, a pirosak negatív értéket képviselnek, és a cél a 0 – vagy az ahhoz legközelebbi eredmény – elérése.

Csukd be a dobozt!

Hagyományos kirakós játék két vagy három játékos számára. Árulják külön is, kis fadobozban, de játszható egyszerűen francia kártyával vagy számkártyákkal és két dobókockával.

Szabályok: Minden játékos 1-től 9-ig számozott kártyákat rak ki maga elé az asztalra. Egyikük dob a két kockával. A dobott pontok összegét ki kell raknia a kártyáiból egy másik sorba (egy vagy több, tetszőleges számú kártyából). Az egyszer már kirakott kártyák nem játszanak tovább. A játékos addig dob tovább, és rakja ki a kapott összegeket a kártyáiból, amíg csak tudja (amíg a játékban maradt lapjaiból elő tudja állítani a dobott számot). Ekkor jön a következő játékos. A hagyományos változatban az a játékos győz, akinek a legkevesebb lapja maradt a kezdő sorban.

Változat: A bontások minél hatékonyabb gyakorlása érdekében javaslom, hogy csak akkor lehessen a két kockával dobott pontok szerinti bontásban kirakni a kártyákat, ha más lehetőség már nincs. (Például a kockákkal 2+3-at dobva a kártyákból kirakható csak az 5-ös, vagy az 1-es és a 4-es, vagy bármely egyéb variáció – de a 2-es és 3-as csak akkor, ha más lehetőség már nincs.) Játszhatunk úgy is, hogy a győztes ne egyszerűen a legkevesebb megmaradt lap birtokosa legyen, hanem az, akinek a megmaradt lapjain a számok összege a legkisebb. Ez stratégiai gondolkodásra ösztönzi a játékosokat, hiszen a lehető legnagyobb lapokat igyekeznek majd kirakni.

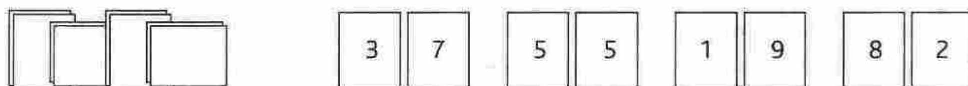
* Ez a játék magyar kártyával játszva nálunk is jól ismert. Az alsó 2-t, a felső 3-at, a király 4-et, az ász 11-et ér; a leosztásban kapott két ász együtt éppen 21-et jelent. Holtverseny esetén az dönt, hogy kinek van meg kevesebb lapból a győztes számértéke. (A ford. megjegyzése)

Tízesek a bankban

Két játékos játszhatja ezt a játékot 36 lapos paklival: négy-négy darab, 1-től 9-ig számozott lappal (tehát akár francia kártyával is, vagy külön készített számkártyákkal). Három játékos esetén már öt-öt vagy hat-hat sorra van szükség (tehát összesen 45 vagy 54 lapra). A játék a 10 bontását gyakoroltatja.

Szabályok: A megkevert pakliból minden játékos négy lapot kap a kezébe. A soron lévő játékos húz egy lapot a megmaradt pakli tetejéről. A már a kezében lévő lapok közül próbál olyat találni, amely a húzott lap értékét 10-re pótolja, egészíti ki. Ha talál, megmutatja a lapokat a többieknek, hangosan megnevezve rajtuk a számokat, és a két lapot lefelé fordítva leteszi az asztalra („beteszi a bankba"). Ekkor a játékos újra húzhat; újra megpróbál párt találni a húzott laphoz, és ha sikerül, a „bankba teszi" a lapokat. Ameddig tudja, így folytathatja. Ha nincs megfelelő párja, a következő játékos jön. Ha minden lap elfogyott a pakliból, a játékosok megszámolják a banka tett lapjaik értékét. Az nyer, akinek a legnagyobb a „bankbetétje".

Didaktikailag fontos az eredmény megszámolása ebben a játékban. Először mutassuk meg, hogy ha páronként számolják meg a lapjaikon lévő részösszegeket, akkor tízesével növekvő sort kapnak: 10, 20, 30 stb. Azután számoltassuk ki laponként is az összeget, a párok sorrendjét megőrizve (például: 3, 10, 15, 20, 21, 30 stb.). Vegyék észre, hogy minden második részösszeg a 10 többszöröse, és a végösszeg így is ugyanannyi lesz.



A játék során a bankba kerülő párokat felváltva tegyék le állva, illetve fektetve, az ábra szerint, hogy megmaradjanak az összetartozó párok. Az eredmény kiszámolásakor a részösszegek a következők lesznek: 3, 10, 15, 20, 21, 30, 38, 40.

Változat: A játék játszható a 10 (100 alatti) többszöröseit mutató számkártyákkal is. Ezeket javasoljuk fekvő formátumban kinyomtatni (így jobban hasonlítanak a bankjegyekre). Egy pakli négy-négy darab, 10-től 90-ig számozott lapból álljon (lásd a *Mellékletet*). A játékosok ekkor 100-as összegű párokat tesznek a bankba. Az eredmény összeszámolásakor ragaszkodjunk a fent leírt kétféle eljáráshoz, hogy a játékosok gyakorolják az olyan összegzést, amelyben minden második részösszeg kerek százas.

Menetelés

Mindkét játékosnak szüksége lesz egy olyan pakli számkártyára, amelyben nyolc-nyolc lap 1 és 4 közötti szám, és négy-négy lap 5 és 9 közötti szám szerepel (azaz összesen 52 lap), továbbá egy játéktáblára (tizenkét akkora érintkező téglalappal, mint a kártyalapok; lásd az ábrát és a *Mellékletet*). Szükség lesz még egy pörgettyűre, amelynek lapján 1-től 4-ig szerepelnek a számok egyforma mezőkben, illetve az 1-esből egy kis szeletet kivágunk az 5-ös számára (lásd az ábrát).*

A játék a 10-nek két vagy több összetevőre bontását gyakoroltatja, illetve a tízesével való számolást akár 100-on is túl, a százas átlépéssel.

(Folytatódik)

* A „pörgettyű" lapját elkészíthetjük kartonpapírból is. A közepébe rajzszöggel rögzíthetünk egy szintén kartonból készített mutatót, amit pörgethetünk. Végső esetben a dobókocka is megteszi: a hatos dobás nem számít, ekkor újra kell dobni. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

4	5/1
3	2

MENETELÉS

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

A pörgettyű lapja és a Menetelés játék játéktáblája.
A táblán 10-nek bármely tizenkét egymást követő többszöröse feltüntethető.

Előkészítés: A játékosok tábláin ugyanazok a számok szerepeljenek. Kezdetben az itt láthatót ajánljuk, amelyen a játékosok 0-tól 120-ig „menetelnek". Később indulhat a menet 50-től, 150-től, akár 970-től is (10 bármely többszörösétől), de úgy, hogy néhány lépés után egy nehéz (százas, vagy ezres stb.) átlépés következzen.

A *Melléklet*ből letölthető üres játéktábla tetszés szerint kitölthető 12 szomszédos 10-többszörössel. Annak alapján választhatunk, hogy mit szeretnénk gyakoroltatni.

Szabályok: A kezdő játékos megpörgeti a pörgettyűt, és annyi lapot húz a saját megkevert kártyapaklijából, amennyit a pörgettyű mutat. Ha e kártyák bármely kombinációja 10-et ad összegül, azt megmutatja a másik játékosnak, miközben hangosan kimondja az összegzést, és a lapokat lefordítva a tábla első (illetve a későbbiekben a következő, még le nem fedett) mezőjére teszi. Hangosan kimondja, honnan meddig „menetelt el". (Például: „Eljutottam 0-tól 10-ig", vagy „Összegyűjtöttem egy újabb tízest, így elmehetek 20-tól 30-ig".) Egy körben akár több ilyen lépést is megtehet, ha húzott kártyái engedik, de mindig csak lépésenként haladhat. Ezután következik a másik játékos.

Ha a kártyák elfogynak, mielőtt bármelyik játékos végigért volna a pályáján (ami szoros játékban előfordulhat), a játékosok megjelölhetik az addig elért helyzetüket a táblán (egy bábu vagy kisebb tárgy elhelyezésével), összegyűjthetik lerakott kártyáikat, és keverés után újra húzhatnak. Az győz, aki előbb végére ér a „menetelésnek".

Változat: A játék Visszavonulás elnevezésű változatában a számkártyákat negatív értékűnek tekintjük (vagy készíthetünk negatív számokat mutató kártyákat). A játékosoknak két vagy több kártyából −10-es összegeket kell előállítaniuk, és a pálya jobb oldali végétől a bal oldali startig hátrafelé menetelniük („visszavonulniuk").

Számbűvész

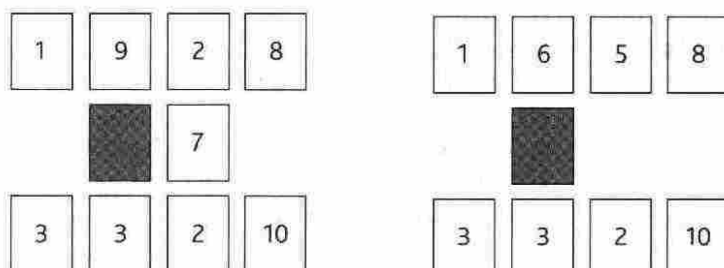
Két játékos játssza ezt a játékot egy pakli számkártyával, amelyben négy-négy darab 1-től 10-ig számozott lap szerepel (azaz összesen 40 lap).

Szabályok: A játékosok megkeverik a paklit, majd mindketten húznak négy lapot. Ezeket felfordítva maguk elé teszik egy sorban. A pakli többi része kettejük közé kerül, lefordítva. A játékosok felváltva húznak a pakliból egy lapot, amelyet felfordítva az asztalra tesznek. A húzó megpróbálja a húzott számot előállítani saját lapjaiból, bármelyik két lap összegeként vagy különbségeként. Ha sikerül neki, mindhárom kártyát elteheti („megnyeri"), és a felvettek helyére két újat tesz a pakliból.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Ha nem sikerül, a húzott lap az asztalon marad, és a másik játékos erre teszi az általa húzott lapot (amit megpróbál összegként vagy különbségként előállítani). Ha ez sikerül neki, a saját három lapján felül az előzőleg ott maradt lapot is elteheti. A játék véget ér, ha elfogy a húzandó pakli. Az győz, akinek több „megnyert" lapja van.



A Számbűvész játék példában szereplő leosztása

Például az ábrán látható leosztásban a felső játékos a 7-et előállítja a 9 és 2 különbségeként. Elteszi a három kártyát (7, 9 és 2), majd a 2-es és 9-es helyére új lapokat húz a pakliból (6, 5). Az alsó játékos felüt egy új lapot a pakliból, és reménykedik, hogy az az 1, 5, 6, 7 vagy 8 valamelyike lesz.

Változat: Betehetünk a pakliba tíz további kártyát is, 11-től 20-ig számozva.

Kivonás 15-ből (vagy bármely más „tizen-" számból)

Két játékos játssza ezt a játékot egy pakli számkártyával, amelyben négy-négy darab 1-től 10-ig számozott lap szerepel.

Szabályok: A játékosoknak végig öt-öt lapjuk van kézben. A kiment lapok helyett újat kell húzniuk. Az egyik játékos letesz egy lapot. A másiknak a kezében lévő lapok közül bármennyivel ki kell egészítenie azt 15-re (vagy egy megegyezés szerinti másik számra). Ha ez sikerül neki, az összes letett lapot elteszi, „megnyeri". Ha nem, a hívó nyereménye lesz a kitett (egy) lap.

Például akinek a 9, 9, 4, 3 és 1 lapok vannak a kezében, és az ellenféle 1-est tesz, leteszi a 9, 4, 1 lapjait, és így elviszi mind a négy lapot. Akkor is ő nyer, ha az ellenfél 2-est hív (9 és 4 letételével), vagy 3-ast (9 és 3 letételével), vagy 5-öst (9 és 1 letételével), vagy 7-est (4, 3 és 1 letételével) stb. Ha viszont 4-est vagy 9-est hív, az ellenfél viszi a lapot. A játék addig tart, amíg van húzható lap a pakliban, és mindkét játékosnak öt lap van a kezében. Az győz, aki több lapot „nyert meg".

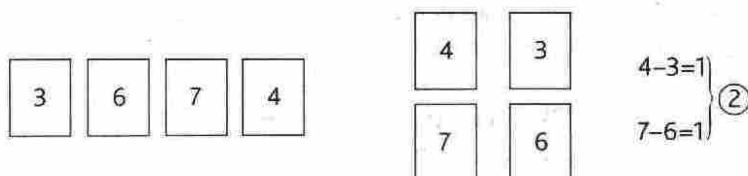
Változat: A játékosok kezdés előtt megegyezhetnek bármely más 10 és 20 közötti számban a 15 helyett, ugyanilyen szabályokkal.

Csökkentsd a különbséget!

Ezt a kivonós játékot két játékos játssza egy pakli számkártyával, amelyben négy-négy darab 1-től 10-ig számozott lap szerepel.

Szabályok: A játékosok felváltva húznak négy-négy lapot a megkevert pakliból. A kihúzott négy lapot úgy kell két párba rendezniük, hogy a párok közti különbség végül a lehető legkisebb legyen. Például ha a játékos a 3, 6, 7, 4 lapokat húzta, akkor jár a legjobban, ha a 7–6 és a 4–3 különbségeket képzi, mert ekkor ezek összege 2; kisebb, mint bármely más párosításban ugyanezen lapok esetén.

A játékos írja le a két kivonást és a különbségek összegét (lásd az ábrát). Az eredményül kapott szám a megszerzett pontja. Az győz, akinek három kör után kevesebb pontja van.



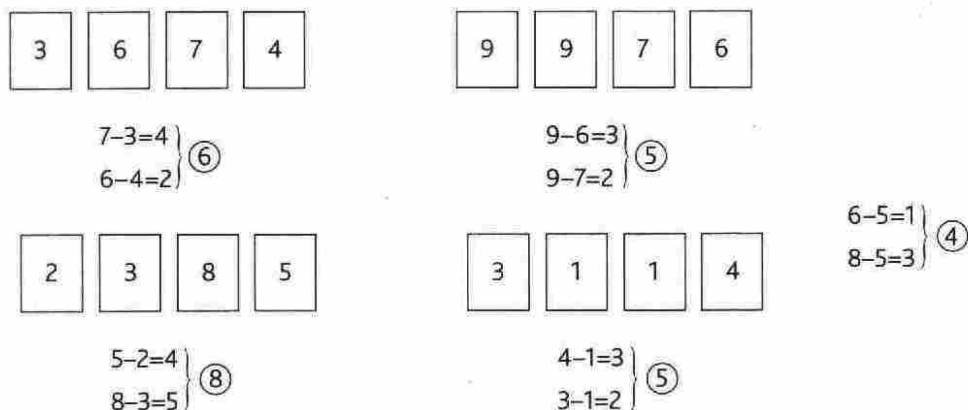
A Csökkentsd a különbséget! játékban a kártyákat párokba kell rendezni, és le kell írni a kivonásokat.

Növeld a különbséget!

Ezt a kivonós játékot két játékos játssza egy pakli számkártyával, amelyben négy-négy darab 1-től 10-ig számozott lap szerepel. Bár hasonlít az előző játékhoz, nehezebb és összetettebb annál.

Szabályok: A játékosok felváltva húznak négy-négy lapot a megkevert pakliból. A kihúzott négy lapot úgy kell két párba rendezniük, hogy a párok közti különbség végül a lehető legnagyobb legyen. Például ha a játékos a 3, 6, 7, 4 lapokat húzta, akkor jár a legjobban, ha a 7–4 és a 6–3 különbségeket képzi (vagy a 7–3 és 6–4 különbségeket), mert ezek összege 6; nagyobb, mint a 7–6 és 4–3 párok esetén, mert akkor csak 2 lenne. A játékos felírja a két kivonást, a különbségek összegét, és ezt szerzi meg az adott körben pontszámként.

Miután négy kört lejátszottak, a játékosok a saját négy pontszámukat ismét párokba állítják úgy, hogy azok különbsége végül a lehető legnagyobb legyen – ugyanúgy, mint a kártyákkal tették a húzások során. Az győz, akinek így a legmagasabb a pontszáma.



A Növeld a különbséget! játékban a négy körben megszerzett pontszámokat párokba kell rendezni úgy, hogy azok különbsége végül a lehető legnagyobb legyen. Ez a játékos 4 pontot szerzett.

További játékok és feladványok

Papírt és ceruzát igénylő feladványok a részekre osztás gyakorlására

Az itt következő, papíron ceruzával játszható játékok már elvont fogalomként kezelik a számokat. Ezeket a játékokat csak olyan diákok számára javasoljuk, akiknek korábban már volt lehetőségük a számok konkrét megismerésére kézzelfogható eszközökkel végzett tevékenység során.

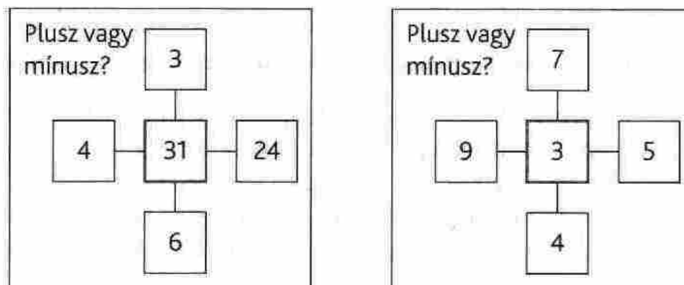
A legfontosabb, hogy a diákok semmiképpen nem számolhatnak egyesével (az ujjaikon vagy másképp). A játékokkal éppen ennek meghaladása a célunk.

Készítsünk és játsszunk „Plusz vagy mínusz" játékot

Ez a játék egyszerre gyakoroltatja a fejben való összeadást és kivonást. Megerősíti azt a felismerést is, hogy összeadások és kivonások sorozata tetszőleges sorrendben elvégezhető, azaz 4+2–3 ugyanaz, mint 4–3+2 vagy 2–3+4.

A játék előkészületeket igényel. A kártyák elkészítése éppen olyan hasznos a tanulásban, mint maga a játék, ha ragaszkodunk hozzá, hogy a gyerekek az összes műveletet fejben végezzék. A kártyákon szereplő számok nagyságának érdemes határt szabni; például egyik szám se legyen nagyobb 30-nál, vagy megegyezhetünk abban, hogy a „célszám" nem lehet nagyobb mint 20.

A játékhoz szükséges sablonok megtalálhatók a *Mellékletben*. A kártyákat az ábra szerint ötösével rakjuk le: egyet középre, négyet köré. A körben lévő négy szám mindegyikét (egyszer és csakis egyszer), valamint az összeadás és kivonás műveletét felhasználva kell előállítanunk a középső „célszámot". Például az ábrázolt első leosztásban 31=24+6+4–3. A második leosztás megoldását az Olvasóra bízzuk.



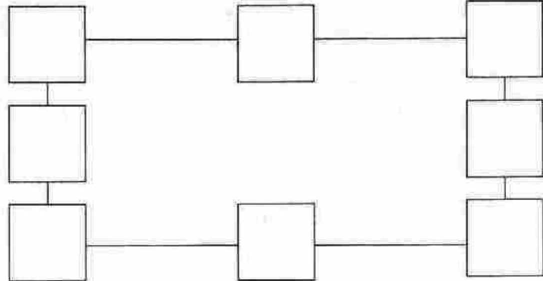
Szabályok: Két vagy három játékos játszhat az előkészített paklival. A kirakott feladványt az első játékos egy percig próbálhatja megfejteni, aztán a következő jön. Ha egyforma képességű diákok játszanak, egyszerre is törhetik a fejüket, és az győz, aki először írja fel a jó megoldást.

Bűvös négyszögek és más számrejtvények

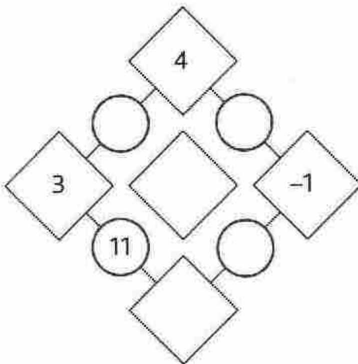
A bűvös négyszög 3×3 számot tartalmaz, mindegyiket csak egyszer. Minden sorában, oszlopában és a két átlójában is megegyezik a számok összege. Sok hasonló feladat található akár az interneten is. Álljon itt négy példa.

		6
3		
	9	

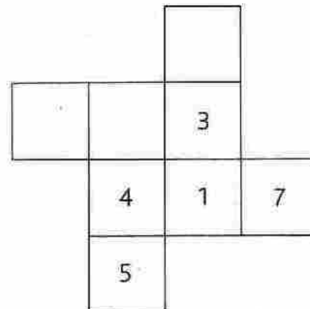
Ezt a bűvös négyzetet az 1-től 9-ig terjedő számokkal kell kitölteni. A számok összege minden irányban 15 kell hogy legyen.



Az 1-től 8-ig terjedő számokat kell beírni a cellákba. A téglalap minden oldalán 13 legyen a számok összege.



Ezt az ábrát úgy kell kitölteni, hogy mindegyik körben a két szomszédos négyzetben lévő szám összege álljon. A középső négyzetbe a négy másik négyzetben álló szám összege kerüljön.



Úgy kell beírni az ábrába a hiányzó számokat, hogy mindegyik háromcellás oszlop és sor összege megegyezzen.

Sudoku

A közismert rejtvény egyszerűsített változatában 1-től 5-ig szerepelhetnek a számok, minden sorban és oszlopban csak egyszer. A vastagabb vonalak két-két mezőt fognak össze. Az ezekben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

Ilyen típusú sudoku feladványokat a kötet letölthető elektronikus *Melléklete* is tartalmaz: összesen 24, különböző nehézségi szintű feladványt. A legkönnyebb feladványok „kizárásos alapon" is megoldhatók, illetve annak felismerésével, hogy a kis számok lehetséges bontásainak száma igen korlátozott. A közepes nehézségű feladványok megoldásához a diákoknak ki kell számolniuk a sorok és oszlopok összegét, és ebből az információból kell visszafelé következtetniük. A legnehezebb feladványok számos különböző technikát igényelnek, és a diáknak azt is el kell döntenie, hogy a megoldás egyes lépései során mikor milyen stratégiát alkalmazzon. Minden feladvánnyal kiválóan gyakorolható a számok részekre bontása és felépítése.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Ha a tanár azt veszi észre, hogy diákjai a rejtvények megoldása közben az ujjaikon számolnak, akkor érdemes tovább gyakorolni a részekre bontós játékokat a színes rudakkal (Kié az utolsó szó?, Szedd fel!, Rakd le! stb.). A sudokuzás megkezdése előtt ki lehet rakatni a diákokkal színes rudakból a 3 és 8 közötti számok minden lehetséges bontását két különböző részre. Ezek maradjanak ott jól láthatóan az asztalon, segítségként. A gyerekek látni fogják a rudakból, hogy a 3-nak és 4-nek csak egy lehetséges bontása van (a 2+2 nem felel meg a sudoku szabályainak, hiszen minden sorban és oszlopban minden szám csak egyszer szerepelhet); hogy az 5 csak kétféleképpen bontható (1+4 vagy 2+3); a 6 szintén csak kétféleképpen bontható (1+5 vagy 2+4); a 7 és a 8 háromféleképpen (lásd az ábrát). Annak felismerése, hogy kevés különböző bontási lehetőség van, gyakran megnyugtatja a gyerekeket. Nem fognak attól félni, hogy felfoghatatlan mennyiségű variáció memorizálását várjuk tőlük.

(világos kék)
3

4 (piros)

5 (sárga)

6 (lila)

7 (fekete)

8 (bordó)

A kis számok két különböző összetevőre bontása rávilágít, hogy a lehetőségek száma igen csekély. A gyerekek megnyugszanak, hogy nem kell túl sokféle bontást megtanulniuk.

Az alábbi sudokuk megfejtése logika és következtetés útján történjen, ne próbálgatással (sokat hibázva).

4		**5**	*6*	
5	*3*	*7*	*4*	
6			*7*	
	6		**4**	**3**
7		*3*		**5**

3	*3*		*7*	*7*
5	*6*	*6*		
4			*4*	
3	*7*	**5**	**4**	*7*
		4		

Ezekben a sudokukban minden sorban és oszlopban egyszer-egyszer szerepelhet az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike. A vastag vonallal körülvett mezőkben szereplő két szám összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokban álló értékkel.

Azok a diákok, akik élvezettel oldották meg a fenti és a *Mellékletben* található sudokukat, talán szívesen kipróbálják a valódi, 9×9-es sudoku feladványokat (legalábbis néhány egyszerűbbet), amelyeket rejtvényújságok és más lapok is közölnek.

A sudoku egyik változata a „különbséges sudoku", amelyben a vastag vonallal körülvett két mezőben álló szám különbsége van megadva. Két példát mutatunk.

Különbség 2		*Különbség 4*		3
Különbség 1		5	*Különbség 3*	
5	*Különbség 2*	*Különbség 2*		*Különbség 4*
		2	*Különbség 1*	
Különbség 4		3		2

5	*Különbség 3*		3	*Különbség 2*
Különbség 2		*Különbség 3*		
Különbség 2	2	*Különbség 2*		1
	Különbség 1		*Különbség 3*	*Különbség 2*
Különbség 4		2		

Ezekben a sudokukban minden sorban és oszlopban egyszer-egyszer szerepelhet az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike. A vastag vonallal körülvett mezőkben szereplő két szám különbségének meg kell egyeznie a bal felső sarokban álló értékkel (mindig a nagyobb számból kell kivonni a kisebbet).

Hivatkozások

1 E. Gray (1997) 'Compressing the counting process: developing a flexible interpretation of symbols', ch. 6 in *Teaching & Learning Early Number*, ed. I. Thompson, Open University Press.

2 R. Bird (2007) *The Dyscalculia Toolkit*, Sage. További ötletek: B. Butterworth–D. Yeo (2004) *Dyscalculia Guidance*, nferNelson.

3 R. Bird (2007) *The Dyscalculia Toolkit*, Sage. További ötletek: M. Sharma (various 1980–93) *Math Notebook*, Center for Teaching & Learning of Mathematics, Framingham, MA, USA. Sharma professzor publikációi és oktatóvideói az alábbi linken érhetők el: www.berkshiremathematics.com.

II. RÉSZ

A tízes átlépés technikája

2. FEJEZET

Előismeretek a tízes átlépés megtanulásához

Áttekintés

A 10 vagy többszörösei átlépésének megtanulása, az átlépés technikájának elsajátítása rendkívül fontos a diákok számára. Az összeadás ekkor a számegyenesen való egyirányú mozgásként jelenik meg. A számegyenes fogalmát körültekintően kell bevezetnünk a tanítás során. Meg kell mutatnunk a diákoknak, miben különbözik a számokat sorban feltüntető számszalagtól. A számegyenes, amelyen az átlépést bemutatjuk, először egy tényleges, felrajzolt vonal legyen. Elegendő gyakorlás után a diák megtanulja maga elé képzelni a számegyenest, amelyen fejben végezhet összeadásokat. Nagyon fontos, hogy az egyenes mentén végzett mozgás ne egy lépésben történjen, hanem két külön lépésben, ugrással. A 10 mint a tízes számrendszer alapszáma mintegy „megállóként" szerepeljen a két lépés között. Az átlépés az egyenes mentén mindig balról jobbra, előrefelé haladjon.

Mielőtt a diákok megtanulnák az átlépést, biztos előismeretekkel kell rendelkezniük. Ez alatt a fogalmak alapos megértését és készségszintű alkalmazását értem – ami ideális esetben már az alsó tagozatban megvalósul. Az itt bemutatott módszerek azonban éppen azoknak a diákoknak segíthetnek, akiknek még idősebb korukban is gondjaik vannak ezen a téren. Akik már rendelkeznek a szükséges előismeretekkel, azok a 3. és 4. fejezetben leírtak alapján lépésről lépésre megtanulhatják az átlépés technikáját.

A tízes átlépéshez szükséges előismeretek

1. A 10 bontásai.
2. A 10-nél kisebb egész számok bontásai.
3. Az összeadás és a kivonás kapcsolata.
4. A számszalag és a számegyes közti különbség.
5. A kivonás mint kiegészítő összeadás.
6. Ismert dolgokból való következtetés képessége.
7. Egyjegyű szám hozzáadása 10-hez.
8. A 10-es számrendszer felépítésének ismerete.
9. A helyiértékek fogalma.
10. Kétjegyű számok előállítása és bontása.

A tízes átlépéshez szükséges előismeretek

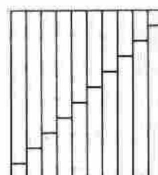
1. A 10 bontásai

Azokat a számpárokat, amelyek összege 10 – vagy más kerek szám, a 10 többszöröse – „kiegészítő pároknak" nevezzük. Ezek megtanulása nem okozhat gondot a gyerekeknek, hiszen mindössze öt (hat) bontásról van szó: 5+5, 4+6, 3+7, 2+8, 1+9 (0+10). Számos játékos feladatot használhatunk ezek begyakorlására.

Néhány javasolt módszer, játék:[1]

- gyöngyfűzés,
- színes rudakból épített lépcső kiegészítése fallá,
- kiegészítő párok keresése,
- felbontós pingpong,
- memóriakártyák párosítása,
- néhány dominós és más felbontós játék az 1. fejezetből.





Gyöngyfűzés kétféle színű gyöngyből, illetve a színes rudakból épített lépcső kiegészítése fallá. Mindkettő hasznos segítség lehet a 10 bontásainak megtanulásában.

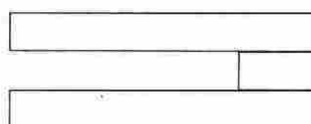
2. A 10-nél kisebb egész számok bontásai

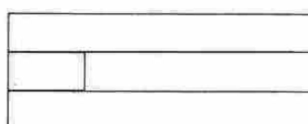
A diákoknak ismerniük kell a 10 és a többi, 10-nél kisebb egész szám bontásait. (A magyar módszertani gyakorlatban ezek a számok „összegalakú nevei".) A korai megértést segíthetik a dobókocka és a dominó (diszkrét) mintázatai, valamint a 10-nél kisebb mennyiségek kézzelfogható módon történő részekre bontása és felépítése. A dobókocka pöttyeinek elrendezései különösen hasznosak a kisdiákok számára.[2] Tapasztalataim szerint az idősebb diákok szívesebben dolgoznak dominóval (lásd az 1. fejezetben).

A diákoknak nem szükséges fejből tudniuk az összes lehetséges kapcsolatot a 10 alatti számok között (de a 10 ötféle bontását igen). Ha képesek lesznek különböző „mintázatokként" elképzelni a számokat, akkor fejben is el tudnak majd végezni velük különféle műveleteket.

Néhány javasolt módszer, játék:

- játékok dominóval (lásd az 1. fejezetben),
- a számok felfedezése és felépítése színes rudakkal,
- „szendvics" színes rudakból, beleértve a „hiányzó színes rudas" játékokat,
- bontásra épülő játékok színes rudakkal és kártyákkal (lásd az 1. fejezetben),
- sudoku feladványok (lásd az 1. fejezetben és a *Mellékletben*).





$\square+2=8$ vagy $8=\square+2$ $2+\square=8$ vagy $8=2+\square$

A színes rudakból úgy készül „szendvics", hogy meg kell találni egy hiányzó rudat a keresett szám felépítéséhez. Az ábrán bemutatott feladat tulajdonképpen azt kérdezi: „Mennyit kell adni 2-höz, hogy 8 legyen?" Csak ezután írjuk le a feladatot számokkal, a hiányzó összeadandót mindkét lehetséges pozícióban keresve.

3. Az összeadás és a kivonás kapcsolata

Az összeadást és a kivonást célszerű egyszerre, párhuzamosan tanítani, hogy nyilvánvaló legyen a köztük fennálló alapvető kapcsolat. Meg kell mutatni a diákoknak, hogyan lehet egyazon lejegyzési módot két különböző nézőpontból összeadásnak vagy kivonásnak tekinteni. Gyakran használom erre a fivér és a nővér hasonlatát: a lány azt mondja, fivére van, a fiú, hogy nővére, pedig mindketten ugyanazt a viszonyt írják le, csak más nézőpontból.

Néhány javasolt módszer, játék:

- hiányzó rudak a színesrúd-szendvicsből,
- színes rudakból felépített egyenlőségek megértése,
- egyszerű egyenlőségek felírása papíron összeadásként és kivonásként,
- rejtett mennyiségi összefüggések különböző módon való lejegyzése,
- adott számításhoz a gyerekek által készített szöveges feladatok,
- háromszög alakú jelölés a számok kétféle bontására; például nyilakkal vagy összekötő vonalakkal jelezzük, hogy a 8 felbontható 2-re és 6-ra.



Háromszög alakú jelölés a számok bontására, amely egyszerre tekinthető összeadásnak és kivonásnak.

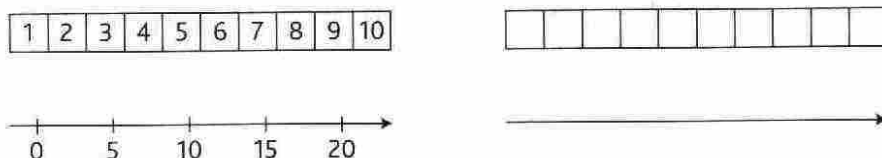
4. A számszalag és a számegyenes közti különbség

Ez a két kifejezés nem cserélhető fel: két különböző fogalmat takarnak. Azok a diákok, aki keverik a kettőt, gyakran eggyel nagyobb vagy kisebb eredményt kapnak a helyesnél.

A számszalag a számrendszernek egy olyan modellje, amely meghatározott helyet vagy területet jelöl ki minden számnak. A diákok az iskolában először úgy találkozhatnak a számszalaggal, hogy például korongokat raknak sorba, és mindegyiket megérintve megszámolják, hány van belőlük. Sok gyermek már iskolás kora előtt képes használni a rajzos számszalagokat, például társasjátékokban. A számszalag mégsem kizárólag a kisdiákokhoz és a kis számokhoz kapcsolódik. Ugyanerről van szó például az első száz szám 10×10-es négyzetbe rendezésekor, amit széles körben használnak az alsó és felső tagozaton is. A számszalaggal való bármilyen számolás során a diákok tényleges számokkal dolgoznak, így tesznek az egyesével számolás esetében is.

A számegyenes egy sokkal elvontabb modell. A számegyenes lehet egy üres vonal a papíron, vagy megszámozható egyesekkel, tízesekkel teljes hosszában – mint például a vonalzó beosztásai. A számegyenes nem más, mint a számok közti intervallumok elvont fogalmának konkrét megvalósulása. Ahhoz, hogy a

diák megtanuljon számegyenesen számolni, nem tényleges számokkal kell dolgoznia, hanem a köztük lévő szakaszokra, távolságokra kell figyelnie. Ha nem különböztetjük meg egyértelműen a számszalagot és a számegyenest, akkor sok gyerek – különösen a diszlexiás és diszkalkuliás – állandóan keverni fogja, hogy a számolást az adott számmal vagy a következővel kell kezdenie. Tény, hogy a számok közötti szakaszokat mutató számegyenes alkalmasabb az összeadás és a kivonás globális, „tömbökben" való elvégzésére (a számok „összegalakú" és „különbségalakú" neveinek gyakorlására).



A számszalagon (felül) az egymást követő számok mindegyike egy-egy azonos nagyságú mezőt foglal el. A számegyenes (alul) a számok közötti szakaszokat mutatja. A rajta jelölt számok nem feltétlenül szomszédosak.

Néhány javasolt módszer, játék:

- „Verseny a számegyenesen" – idősebb tanulók számára 15 vagy 20 kétjegyű, szomszédos számot ábrázoló szalag segítségével alkalmazható.
- Ügyeljünk a pontos szóhasználatra, magyarázzuk meg a diákoknak a számszalag és a számegyenes közti különbséget.
- Átvitel a számszalagról a számegyenesre: az 1 cm-es négyzetekből álló szalagra helyezzünk színes rudakat, ezekkel szemléltessük az összeadást (kezdetben olyant, amely nem igényel tízes átlépést); a diákok jelöljék a számegyenesen a kiinduló számot, a hozzáadást és az eredményt.
- Átvitel a számegyenesről a számszalagra: jelöljünk ki egy műveletet a számegyenesen (mihez mit adunk; először tízes átlépés nélkül, és ne írjuk fel az eredményt), majd a diákoknak ezt ki kell rakniuk a szalag konkrét számain színes rudakkal.
- 100-as négyzet: készítsünk 10×10-es négyzetrácsot, írjuk bele a számokat 1-től 100-ig (vagy akár tízesenként vágjunk fel egy 1-től 100-ig számozott szalagot, és tegyük a szakaszokat egymás alá), ez jól mutatja bármelyik kétjegyű szám pótlását, kiegészítését a következő 10-többszörösig, továbbá a 100 bontásait; a diákok ezek mindegyikét jelöljék a számegyenesen is.

5. A kivonás mint kiegészítő összeadás*

A diszkalkuliás vagy más részképességzavarral küzdő gyermek különösen nehéznek találja a visszafelé végzendő műveleteket (visszaszámlálás, kivonás stb.) Az ilyen diákot meg kell tanítani, hogyan végezheti az összeadást és a kivonást egyaránt előrefelé számolva. A kivonást mint kiegészítő összeadást értessük meg vele: a kivonandó mennyiséget a számszalag vagy számegyenes *kezdete* felől számolva hagyja el a kisebbítendőből. Az eredményt, a két mennyiség különbségét a számok közti távolság (a szakasz hossza, a hézag mérete) adja meg. A kivonandó részt be is satírozhatjuk a számegyenesen, ez sok gyereknek segít a kiegészítő összeadás elvégzése és lejegyzése során.[3]

Például a 17–13 kivonást szemléltetve rajzoljunk egy számegyenest. Jelöljük meg a 0-t és a 17-et, majd a 13-at a vonal kezdetétől (a 0-tól) hagyjuk el (satírozzuk át). A megoldást a 13 és a 17 közötti szakasz hossza mutatja.

* A mai magyar matematikatanítás ezt pótlásnak nevezi. (A lektor megjegyzése)

Példa: 17–13



Néhány javasolt módszer, játék:

- kiegészítő összeadások korongokkal,
- kiegészítő összeadás a számegyenesen a 0-tól kezdve,
- kiegészítő összeadások üres számegyenesen,
- kivonás „a különbség megtalálásával",
- a kivonást a diák oldja meg egyenletként, vagy kezelje hiányzó tagú összeadásként; a 17–13=□ például ugyanazt jelenti, mint a 13+□=17,
- kiegészítő összeadás mint a bonyolult, bontást igénylő kivonás elkerülésének módja,
- szöveges feladatok a kivonás és a kapcsolódó hiányzó tagú összeadás gyakorlására; a 15–7 kivonást például megfogalmazhatjuk így: *Hány kavics marad Matyi zsebében, ha 15 volt benne, és abból 7-et kivett?*, vagy utalhatunk a kapcsolódó összeadásra: *Ha Matyi zsebében 7 kavics van, mennyit kell még beletennie ahhoz, hogy 15 legyen?*,
- pénzzel kapcsolatos és mérési feladatok, amelyekben 100-ra való kiegészítés szerepel.

6. Következtetés ismert tényekből

Meg kell tanítani a diákoknak, hogyan kaphatnak ismert tényekből következtetés útján újakat. Az előismeretek szintjén a cél rávezetni a gyermeket, hogy használja a logikáját a számítások elvégzése során. Például, miután felépítettünk egy számot konkrét dolgok (korongok vagy kavicsok) két csoportjából (azaz diszkrét mennyiségekből), mutassuk meg, hogy egy elem (korong, kavics) áthelyezése az egyik csoportból a másikba eggyel csökkenti az egyik, és eggyel növeli a másik csoport méretét, miközben az összeg nem változik. Beszéltessük a gyermeket az eljárás során, fogalmazza meg ő, mit tapasztal. A színes rudakból (mint folytonos mennyiségekből) készített „szendvicsek" (lásd a 2. pont végén) szintén megmutatják, hogy ha az egyik összetevő növekszik egy egységgel, a másiknak automatikusan csökkennie kell eggyel, hogy az összeg változatlan maradjon. Például, ha 4+3 az 7, ebből következik, hogy 5+2 szintén 7.

7
4+3
5+2
7

Később a diákok gyakorolják a következtetést már ismert összegzésekből. Például, ha már tudják, hogy 4+6=10, abból következik, hogy 4+7=11, vagy 4+5=9, vagy 5+6=11, vagy 3+6=9. Ha már tudják, hogy 7+7=14 (egyszerű kettőzés, duplázás), abból következik, hogy 6+7=13, vagy 7+8=15 stb. A 9. fejezetben részletesebben is foglalkozunk a következtetés módjaival.

Néhány javasolt módszer, játék:

- Építsünk fel számokat két összetevőből, korongok vagy egységkockák használatával. Úgy rögzítsük az összeget, hogy közben vegyük észre, mi történik, ha egy elemet átteszünk egyik csoportból a másikba; például: 2+6=3+5.
- Építsünk fel számokat két összetevőből, színes rudak használatával. Tegyük egymás után a két különböző rudat. A diákoknak meg kell nevezniük az összes lehetséges kapcsolatot, amely ebből a felépítésből kiolvasható, összeadásként vagy kivonásként. Például a piros és sárga rudak egymás után helyezését elolvashatjuk 4+5=9 módon, vagy 5+4=9 vagy 9=5+4 vagy 9=4+5 vagy 9–4=5 vagy 9–5=4 módon.

Ebből egylépéses következtetéssel, azaz az egyik összeadandó egy egységgel való megváltoztatásával további egyenlőségek következnek (3+5=8, 5+5=10, 4+4=8, 4+6=10), amelyeket a fentiekhez hasonlóan sokféleképpen olvashatunk el.

- Vegyes feladatok írásban (két egyforma vagy két szomszédos szám összegzése, vagy ezektől eggyel különböző számok összegzése). A diákok válaszait pontozzuk: a jó válasz pontot ér, de a rossz pontlevonással jár. Ezzel a diákokat arra ösztönözzük, hogy gondolkodjanak, jó választ adjanak, ne csak bemondjanak egy eredményt.
- Írjunk fel tíz nehéz összeadást a táblára, amelyek eredményét a gyerekek zsebszámológéppel kiszámíthatják. Ezután gép nélkül adják meg a felírt egyenlőségekhez kapcsolódó, azokból következő műveletek eredményét. Például ha a táblán ez szerepel: 28+56=84, akkor ehhez kapcsolódó kérdés lehet: Mennyi 56+29? Mennyit kell adni 38-hoz, hogy 84 legyen? Mennyi 84-ből 57? stb.
- Két egyforma szám összegzéséből kiindulva maguk a gyerekek gyártsanak (és oldjanak meg) kapcsolódó feladatokat; például: 8+7 vagy 25+26.

7. Egyjegyű szám hozzáadása 10-hez

A színes rudak használata nagyban elősegítheti az alapos megértést. Például építsük fel a 12-t: tegyük egymás után a narancssárga és a rózsaszín rudat, jelezve, hogy 12=10+2 (azaz egy tízes és két egyes). Az összes 10 és 20 közötti számot építsük fel ugyanígy, de véletlenszerű sorrendben, és nevezzük meg az összeadást (például: 12=10+2 vagy 10+2=12).*

Néhány javasolt módszer, játék:

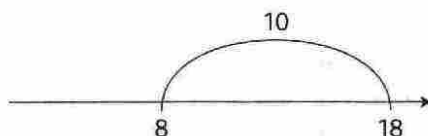
- A diákok építsék fel a 10 és 20 közötti számokat véletlenszerű sorrendben, a helyiérték-tartókba** tett színes rudakkal vagy a Dienes-készlet elemeivel. A felépített számokat hangosan nevezzék meg, és írják le számjegyekkel is.
- A diákok építsék fel a 10 és 20 közötti számokat 10 pennys és 1 pennys, vagy 10 centes és 1 centes pénzérmékből.*** A felépített számokat hangosan nevezzék meg, és írják le számjegyekkel is.
- Egy 30 egység hosszú számszalagon a diákok találják meg bármelyik 10 és 20 közötti számot, és – egyesével való előre- vagy hátrafelé számlálás nélkül – az annál 10-zel nagyobb és 10-zel kisebb számot is.
- 100-as négyzet: készítsünk 10×10-es négyzetrácsot, és írjuk bele a számokat 1-től 100-ig (vagy akár tízesenként vágjunk fel egy 1-től 100-ig számozott szalagot, és tegyük a szakaszokat egymás alá). A diákok találják meg rajta bármelyik, véletlenszerűen kiválasztott számot, és rögtön ezután az annál 10-zel nagyobb és 10-zel kisebb számot is.
- Adjunk meg véletlenszerűen számokat 0 és 9 között (például egy így felcímkézett 10-oldalú dobókával vagy pörgettyűvel; lásd 1. fejezet, Kártyajátékok, Menetelés); ehhez a diákok fejben adjanak hozzá 10-et, és jelöljék a műveletet számegyenesen.

* Az angol (és sok más) nyelvben a 10 és 20 közötti számok megnevezése igen megnehezíti a kisdiák dolgát. A 11 és 12 rendhagyó neve (eleven, twelve) elrejti, hogy „tizen-valahányas" számról van szó. A többi szám esetén pedig a megnevezés fordított sorrendje (thirteen etc.) okoz nehézséget a számok leírásakor: miközben balról jobbra haladva írjuk előbb az 1-est, aztán a 3-ast, a megnevezés mintegy „jobbról balra" halad. Ezért az angol iskolai oktatásban ennek a számtartománynak a biztos kezelése külön gyakorlást, célzott feladatokat igényel, sokkal hangsúlyosabb, mint nálunk, ahol ez a nyelvi nehézség nem áll fenn. (A ford. megjegyzése)

** Bővebben lásd a kötet végén, a *Kislexikon*ban. Nálunk ez az eszköz nem használatos. (A ford. megjegyzése)

*** Ez nálunk jelenleg, 2011-ben nem használható, mert nincsenek forgalomban 1 forintosok. Ha majd bevezetik az eurót, a centekkel menni fog. (A ford. megjegyzése)

Példa: 8+10



10 hozzáadása, amely NEM igényli a tízes átlépés technikáját

További szükséges előismeretek a 10 többszöröseinek átlépéséhez

8. A 10-es számrendszer felépítésének megértése

A felső tagozatos diákoknak már tisztában kell lenniük a helyiértékek rendszerével, hogy megértsék a matematika tananyagot. Sok számolási hiba a helyiértékek hiányos vagy téves ismeretére vezethető vissza. (Lásd még a 9. pontot.)

A 100-as négyzetráccsal való gyakorlás (lásd az előző pontban) az egyik legjobb módja annak, hogy a diák felismerje és megtanulja: az első tíz szám minden következő tízes tartományban azonos mintaként ismétlődik.

A diákoknak addig nem szabad nagyobb számokkal dolgozniuk, amíg a kétjegyű számokkal nem bánnak biztosan (például meg tudják állapítani, hogy melyik szám melyik két 10-többszörös közé esik). Ha a 100-as számkörben már otthonosan mozognak, az sem jelenti, hogy tudásuk automatikusan kiterjeszthető az 1000-es számkörre. A diszkalkuliás és más matematikai nehézségekkel küzdő gyerekeknek általában hiányosak az ismereteik a számok nagyságáról, zavarosak az elképzeléseik a tízes számrendszer felépítéséről. A számfogalom fejlesztéséhez rengeteg gyakorlásra van szükségük konkrét, kézzelfogható szemléltetőeszközökkel.

Néhány javasolt módszer, játék:

- 20 fokú lépcsősor építése színes rudakból,
- kétjegyű számok felépítése színes rudakkal a helyiérték-tartókban vagy a Dienes-készlet elemeivel, majd írásbeli rögzítésük oszlopokba írt számjegyekkel,
- véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű szám megtalálása a lehető leggyorsabban a számszalagon, később a majdnem üres szalagon (amelyre csak a 10 és többszörösei vannak ráírva, illetve a köztük lévő felezőpontok vannak bejelölve),
- 100-as négyzet: készítsünk 10×10-es négyzetrácsot, írjuk bele a számokat 1-től 100-ig (vagy akár tízesenként vágjunk fel egy 1-től 100-ig számozott szalagot, és tegyük a szakaszokat egymás alá). A diák találjon meg ezen bármely véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű számot; nevezze meg és találja meg az ezt követő legközelebbi 10-többszöröst,
- bármely kétjegyű szám megtalálása a számegyenesen, majd a vele szomszédos két 10-többszöröstől való távolságának meghatározása.

9. A helyiérték alapjai

A matematikai nehézségekkel küzdő diákok nagy részének hiányosak a helyiértékről alkotott fogalmaik. Aki nem értette meg, hogy az egyes helyiértékek neve logikusan ismétlődik, az nem igazán érti a négy- vagy többjegyű számokat.

A tanárok valószínűleg feltételezik, hogy a diákok maguktól felismerik az ismétlődéseket egy nagyobb rendszerben, és nem hívják fel rájuk nyomatékosan a diákok figyelmét. A diákok először megtanulják az egyjegyű számokat, később a kétjegyűeket (amelyek tízesekből és egyesekből állnak), majd a háromjegyűeket (bevezetve a százasokat) és a négyjegyűeket (bevezetve az ezreseket). Ez a fokozatos bevezetés

sok gyerekben azt a képzetet kelti, hogy a helyiértékek rendszerében minden egyes új oszlopnak új neve van. Ez nagyon gyakori félreértés.

Valójában nem minden oszlopnak van új neve, csak az oszlopok hármas csoportjainak. Ezek a hármasok egy „családba" tartoznak, nagyság szerinti nevük: egyesek, ezresek, milliósok, milliárdosok stb. Így a többjegyű számok helyiértékei (jobbról kezdve): egyesek, tízesek és százasok az *egyesek* között, aztán egyesek, tízesek és százasok az *ezresek* között, aztán egyesek, tízesek és százasok a *milliósok* között, majd egyesek, tízesek és százasok a *milliárdosok* között és így tovább.

milliósok			ezresek			egyesek		
százasok	tízesek	egyesek	százasok	tízesek	egyesek	százasok	tízesek	egyesek

A három tartományban a százasok, tízesek és egyesek oszlopa ismétlődik.

Néhány javasolt módszer, játék:

- 20 fokú lépcsősor építése színes rudakból. Egyes rudakat vegyünk ki a sorból, és tegyük a helyiértéktartókba. A diákok nevezzék meg hangosan, majd írják le számjegyekkel a kiemelt számot.
- Egy leírt kétjegyű számot a diákok rakjanak ki színes rudakból vagy a Dienes-készlet elemeiből, majd mutassák meg tízsoros és háromsoros abakuszon.* (Mindenképpen 3 vagy 6 soros abakuszt használjunk, sosem 4 vagy 5 sorosat, hogy ezzel is erősítsük a gyermekben a helyiértékek nevének hármasával való ismétlődését.)
- Egy üres számegyenesen a diákok találjanak meg bármely kétjegyű számot, és határozzák meg a két, vele szomszédos 10-többszöröstől való távolságát. Ez a gyakorlat kiterjeszthető háromjegyű számokra és a szomszédos 100-többszörösök megnevezésére is (de a távolságokat ezen a szinten még ne próbálják meghatározni), vagy akár még több jegyű számokra is.
- Már ismerős összeadásoknak és kivonásoknak új értelmet adhatunk átnevezett színes rudakkal. Ezeket a műveleteket a diákok írják le egy sorban is, és helyiértékesen, egymás alá írt számokkal is. Például a rózsaszín és piros rudakkal alapesetben a 2+4=6 összeadást vagy a 6–4=2 kivonást jelöljük. Megkérdezhetjük a diákot, hogy milyen műveletet jelent, ha a rudak értékét 20-nak és 40-nek, vagy 200-nak és 400-nak, vagy 2000-nek és 4000-nek tekintjük.
- Háromsoros abakuszon és számegyenesen egyszerre mutassuk be a 10 és 100 többszöröseinek hozzáadását és kivonását; például: 56–10 vagy 145+200. A diákok írják le számokkal a feladatot, vízszintesen és függőlegesen (egy sorban és oszloposan) is. Valamilyen színnel jelöljék meg azt az egy számjegyet, amely megváltozik a művelet során, és egy másik színnel azokat, amelyek nem változtak meg.
- Egyértelműen mutassuk meg a diákoknak, hogyan ismétlődnek a helyiértékek nevei háromoszloponként, és azt, hogy hogyan kell leírni és kiolvasni többjegyű számokat.
- Mutassunk rá, hogy a helyiértékes számírás milyen időtakarékos, tömör jelölésmód – mennyivel egyszerűbb, mintha betűkkel kellene leírni a többjegyű számok nevét.
- Kockás és pörgettyűs játékok, amelyekben a számokat konkrétan felépítjük, majd a játék folyamán megváltoztatjuk.

10. Kétjegyű számok előállítása és bontása

A fent leírt előismeretek többnyire a számok felépítésére, előállítására vonatkoznak. Ugyanilyen fontos, hogy a diák megtanuljon számokat részekre bontani, és megtanulja, hogy ezt több különböző módon teheti. Például annak megértése, hogyan lehet egy számot egy 10 és 20 közötti számra, illetve további

* Az abakusz golyós számolóeszköz. (A lektor megjegyzése)

néhány (egész) tízesre bontani, lényeges állomás az írásbeli kivonásra való felkészülésben. Mint mindig, ehhez a felismeréshez is a kézzelfogható szemléltetőeszközökkel való tevékenykedés során juthatnak el a diákok. A papíron ceruzával való elvont gyakorlás ritkábban eredményez valódi megértést.

Néhány javasolt módszer, játék:

- Számok felosztása tízesekre és egyesekre többféle módon, szemléltetőeszközöket használva, mielőtt a bontást rajzban vagy számjegyekkel rögzítenénk. Például az 56-ot osszuk fel 50+6, 40+16, 30+26, 20+36, 10+46 módon is.
- Számok felosztása úgy, hogy az egyik összetevő 10 és 20 között legyen. Például: 56=16+40 vagy 88=70+18. Előbb mindig konkrétan alkossuk meg a bontást színes rudakkal, és csak azután következzen az elvont leírás.
- Számok felépítése tízesek és egyesek összeadásával (például: 29=20+9), azután a tíz többszöröseinek és az egység többszöröseinek összeadásával (például: 29=2·10+9·1). Itt is a konkrét felépítés legyen az első lépés.
- Kockás és pörgettyűs játékok, amelyekben a számokat konkrétan felépítjük, majd a játék folyamán csökkentjük.

Hivatkozások

1 A fejezetben javasolt módszerekről és játékokról részletesebben: R. Bird (2007) *The Dyscalculia Toolkit*, Sage.

2 További mintázatok: D. Yeo (2003) *Dyslexia, Dyspraxia & Mathematics*, p. 102, Whurr.

3 Dorian Yeo ötlete: uo., p. 224.

3. FEJEZET

A tízes átlépés

Áttekintés

A tízes átlépés az egyik leghasznosabb számolási technika, amelyet a gyerekek megtanulhatnak. A tízes átlépés technikája a számok lineáris egymásra következésének megértésén alapul. Az összeadást a számegyenes mentén való mozgásként jelenítjük meg, az összeadandókat megfelelő részekre bontva. A számegyenest kezdetben tényleges vonalként ábrázoljuk, később is legalább vázlatosan. Még később – de csakis elegendő gyakorlás után – a diákoknak képesnek kell lenniük rá, hogy a fejben végzett összeadás során maguk elé képzeljék a számegyenest. A tízes átlépés technikájának döntő fontosságú mozzanata, hogy az összeadást nem egy lépésben vagy egyesével számolva hajtjuk végre, hanem mindig két lépésben, két ugrással, amelyek között a 10 mintegy határkőként, megállóként, ugródeszkaként szerepel.

Meggyőződésem szerint a tízes átlépés technikája egy nagyon fontos további mozzanat elsajátítását is bevezeti: nevezetesen, hogy a számegyenes mentén mindig előrefelé mozgunk.

Bár a tízes átlépés technikája elvont fogalmi eljárás, mégis kézzelfogható szemléltetőeszközökkel való tevékenykedés keretében vezessük be (és inkább folytonos, semmint diszkrét eszközökkel, tehát inkább a színes rudakkal, mint a korongokkal), és csak ezután kerüljön sor a művelet papíron, ceruzával, egy üres számegyenesen való lejegyzésére.

Az üres számegyenes egy olyan vonal, amelyen nincsenek jelölve a számok. A diákok csak azokat a számokat jelölik be rajta, amelyekre szükségük van a számítás elvégzéséhez. Magam nem tartom célravezetőnek azt az eljárást, hogy mindkét irányban lehessen ugrani a számegyenesen, megfelelő (pozitív vagy negatív) előjellel ellátott számokkal jelölve a mozgást. A speciális matematikai nehézségekkel küzdő diákok számára komoly nehézséget okoz a visszafelé történő számolás, ezért én csupa olyan eljárást tanítok nekik, amelyekben előrefelé kell dolgozniuk. A számegyenesen tehát mindig balról jobbra haladva számolnak, amivel elkerülhető a különböző előjelek és különböző irányú nyilak használata.

A tízes átlépés technikája nem korlátozódik az összeadásra. Igen jól használható a kiegészítő összeadásként értelmezett kivonás esetében is. Sok tanár úgy véli, mivel az összeadást mint a számegyenes mentén balról jobbra való mozgást tanítjuk, a kivonás tanításának egyetlen logikus módja az ellenkező irányú mozgás. A matematikai nehézségekkel küzdő diákok többsége azonban túl nehéznek találja a visszafelé végzett számolást, amelyet nem is szabad rájuk erőltetni. Ha a diák képes egy vagy két kis lépést tenni visszafelé a fejben számolás során (például a 26–6, vagy kiterjesztve a 26–8 kivonásban), akkor persze bátorítani kell, hogy gyakorolja, fejlessze ezt a képességét. Kettőnél több visszafelé lépés azonban többnyire túlterheli a matematikai nehézségekkel küzdő diák memóriáját. Ezeknél a diákoknál a kivonást célszerű kiegészítő összeadásként tanítani, amelyet a számegyenesen szintén balról jobbra haladva végezhetnek.

A tízes átlépés technikájának az üres számegyenes modelljével való együttes használata azzal a haszonnal jár, hogy az összeadást és a kivonást azonos módon lehet végrehajtani. A különbség abban mutatkozik, hogy hol olvasható le az eredmény. Az összeadás eredménye az a szám (a számegyenesen), amelyhez a művelet során eljutottunk; a kivonás eredménye pedig a szükséges elmozdulás, az ugrás nagysága.

Mielőtt megtanulnák a tízes átlépést, a diákoknak el kell sajátítaniuk az előző fejezetben tárgyalt első hét előismeretet. Ez a fejezet bemutatja, hogyan tanítható meg a tízes átlépés technikája, mint egyszerre csak egy kis lépést tevő, egymás utáni tevékenységek sorozata. A következő fejezet azt tárgyalja, hogyan lehet kiterjeszteni a tízes átlépés tanítását 10 többszöröseire.

A tízes átlépés megtanulását szolgáló gyakorlatok

1. gyakorlat: Két egyjegyű szám összeadása, amelyek közül a második tag mindig azonos; például adjunk hozzá különböző számokhoz 6-ot.

2. gyakorlat: Két egyjegyű szám összeadása, amelyek közül az első tag mindig azonos; például adjunk hozzá 8-hoz különböző számokat.

3. gyakorlat: Az összeadás felcserélhető (kommutatív) tulajdonságának megmutatása.

4. gyakorlat: Egyjegyű szám hozzáadásának ábrázolása számegyenesen.

5. gyakorlat: Számegyenes használata egyszerű kivonásoknak kiegészítő összeadásként való elvégzéséhez; csak 20 alatti számokkal és 10 alatti eredményekkel.

6. gyakorlat: A számegyenes elképzelése fejben végzett számításokhoz.

A tízes átlépés

Az első gyakorlat előtt

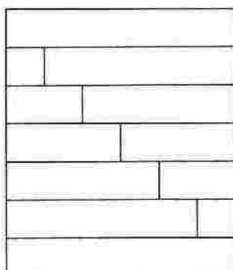
Bizonyosodjunk meg róla, hogy a diákok rendelkeznek a szükséges előismeretekkel (lásd a 2. fejezetet).

1. Gyakorlat

Két egyjegyű szám összeadása, amelyek közül a második tag mindig azonos; például adjunk hozzá különböző számokhoz 6-ot.

Kezdjük például a 6-os számmal: a gyerekek rakják ki színes rudakból a 6 összes lehetséges bontását „szendvicsszerűen" (az ábrán látható módon).

6 (lila)



A „6-os szendvics" az összes lehetséges bontás-párral, nagyság szerint sorban.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Az elkészített szendvicset hagyjuk az asztalon, hogy a diákok a következő műveletek során végig láthassák. Adjunk különböző számokhoz 6-ot, rudakból kirakva – csupa olyan példában, amelyben át kell lépni a 10-et (azaz 4-nél nagyobb számokhoz adjunk 6-ot).

Például a 8+6 összeadáshoz tegyük egymás után a bordó és a lila rudat.

Példa: 8+6

8 (bordó)	6 (lila)

Az eredmény hosszabb egy narancssárga rúdnál, de rövidebb kettőnél – ami jól látható, ha az összeadandók alá teszünk egy vagy két narancssárga rudat. Az eredmény 10 és 20 közé esik, tehát szükség lesz a tízes átlépésre.

A rudak segítségével a diákok láthatják, hogy a tízes átlépéshez a 6-ot fel kell bontaniuk 2+4 módon, mert a 2 *pótolja ki* az első számot (a 8-at) 10-re; a 4 pedig a 6 *fennmaradó része*, ha az első összetevő a 2 volt.

A diákok a lila rúd mellé tehetik a két kisebb rudat, hogy lássák, együtt valóban azzal azonos nagyságúak, vagy a kint hagyott 6-os szendvicsen ellenőrizhetik a bontást. Ezután kicserélik a lila rudat a rózsaszínre és a pirosra.

A narancssárga rudat hagyjuk ott a helyén, amíg a diákok mindezt végigjátsszák, hogy hangsúlyozzuk: átléptük a 10-et. Ha a diákok a szükséges bontás megtalálása után zavarónak érzik a rúd jelenlétét, vegyük el onnan.

Példa: 8+6

8 (bordó)	6 (lila)

8 (bordó)	6 (lila)
10 (narancssárga)	

(rózsaszín)

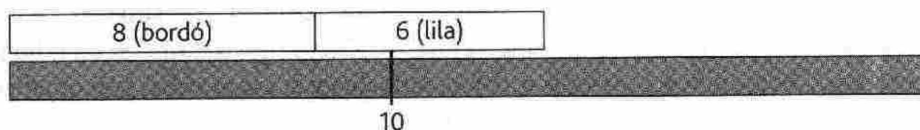
8 (bordó)	2	4 (piros)
10 (narancssárga)		

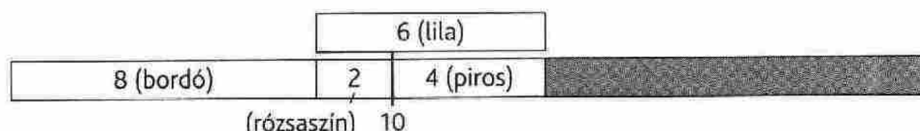
A diák akkor érezheti zavarónak a narancssárga rúd jelenlétét, ha nem világos számára, hogy az csak az összehasonlítás kedvéért van ott, és megpróbálja belefoglalni a számításba. Ebben az esetben hasznos lehet úgy kezdeni a tízes átlépés gyakorlását, hogy a diák rajzoljon egy csíkot. Ez 1 cm széles legyen (a színes rudak méretének megfelelően), legalább 20 cm hosszú, a bal oldali vége legyen zárt, a jobb oldali nyitott. A balról mért 10 cm-nél húzzon keresztbe egy vonalat, hogy jelezze, ez az átlépendő pont, azaz a 10-es szám. A színes rudakat helyezze a csíkra; a berajzolt vonal jelzi, hogyan kell a második összeadandót – példánkban a 6-ot – összetevőkre bontani.

(Folytatódik)

(Folytatás)







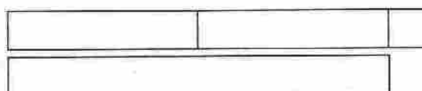
Térjünk vissza a szendvicshez: a diák minden esetben mutassa meg a szükséges bontást jelző párt, és nevezze meg, melyik *pótolja ki* 10-re az első számot, és melyik a *fennmaradó rész*. Példánkban a rózsaszín és piros rúd sorát kell megmutatnia, azaz a 2+4-et.

Mutassunk rá, hogy azért foglalkozunk ennyit a második számmal, mert ezt kell bontanunk. Ennek a számnak a helyzete (ez a második összeadandó) határozza meg, hogy ezt kell bontanunk. Hangsúlyozzuk ezt gyakran és egyértelműen.

Ismételjük meg a gyakorlatot, más számokhoz adva 6-ot. Mindig térjünk vissza a szendvicshez, és a diákok minden esetben mutassák meg, melyik a 6 éppen szükséges bontása.

Példa: 5+6





vagy



Ezután kerestessünk a diákokkal olyan összeadásokat, amelyekben a 6-ot nem kell bontani, mert nem történik tízes átlépés (1+6 … 4+6).

Hogy ellenőrizzük, mennyire értették meg a diákok a gyakoroltakat, tegyünk fel olyan kérdéseket, amelyekben a 6-ot adott módon kell felbontani. Például: *Mihez kell adnunk 6-ot, hogy a tízes átlépésekor 5+1 módon kelljen felbontani?* Ekkor előbb fel kell fogniuk, hogy a 6 első összetevője az 5, és a keresett első számot ez egészíti ki 10-re, tehát a keresett szám az 5 lesz. (Ez az előzőekben gyakorolt feladat.) A tízes átlépés tanulásának korai szakaszában nem minden gyerek lesz képes erre a következtetésre, mégis újra és újra fel kell tenni nekik az ilyen típusú kérdéseket. Előbb-utóbb felelni tudnak rá: ekkor biztosak lehetünk benne, hogy megértettek egy fontos elvet.

Ismételjük a gyakorlatot más hozzáadandóval is, ne csak a 6-tal.

2. Gyakorlat

Két egyjegyű szám összeadása, melyek közül az első tag mindig azonos; például adjunk hozzá 8-hoz különböző számokat.

A színes rudak használatával mutassuk meg, hogy az első összeadandó – példánkban a 8 – változatlan marad, miközben a másodikat összetevőkre bontjuk. Hangsúlyozzuk újra és újra, hogy az első tag határozza meg, hogyan kell a másodikat felbontani, ahogyan azt az előző gyakorlatban láttuk. A bontás mindig: a 10-re *pótló rész* és a *fennmaradó rész.*

Például a 8+5 összeadásban tegyük egymás után a bordó és a sárga rudat.

Példa: 8+5

8 (bordó)	5 (sárga)

Az eredmény hosszabb egy narancssárga rúdnál, de rövidebb kettőnél. Ez jól látható, ha egy narancssárga rudat az összeadandók alá teszünk, vagy ha a rudakat az előző gyakorlatban bemutatott, felrajzolt csíkhoz illesztjük. Az 5-öt tehát bontani kell 2+3 módon: mert 2 *pótolja ki* az első számot (a 8-at) 10-re; a 3 pedig az 5 *fennmaradó része,* ha az első összetevő a 2 volt.

Mielőtt kicserélik a sárga rudat a rózsaszínre és a világoskékre, a diákok a sárga rúd mellé tehetik a két kisebb rudat, hogy lássák: együtt valóban azzal azonos nagyságúak.

5 (sárga)	
2	3
(rózsaszín)	(világoskék)

A diákok a lerakott rudak alapján a következőképpen olvassák ki az összeadást, amelyben átlépik a 10-et: *8 meg 5 egyenlő 8 meg 2 meg 3-mal, azaz 10 meg 3-mal, ami egyenlő 13-mal.*

8 (bordó)	5 (sárga)	
	2 (r.)	3 (vk.)
10 (narancssárga)		3 (vk.)

r. = rózsaszín
vk. = világoskék

Ismételjük meg a gyakorlatot más számokat adva a 8-hoz. A számok ne legyenek sorrendben; például: 8+3, 8+6, 8+4, 8+9, 8+8, 8+5, 8+7.

Beszéljük meg, miért van szükség a fenti összeadások mindegyikében a tízes átlépésre, és miért nincs rá szükség a 8+1-ben. A gyerekek maguk fogalmazzák meg, mit értenek most a „10 átlépése" kifejezésen.

Ismételjük a gyakorlatot más első összeadandóval is, ne csak a 8-cal.

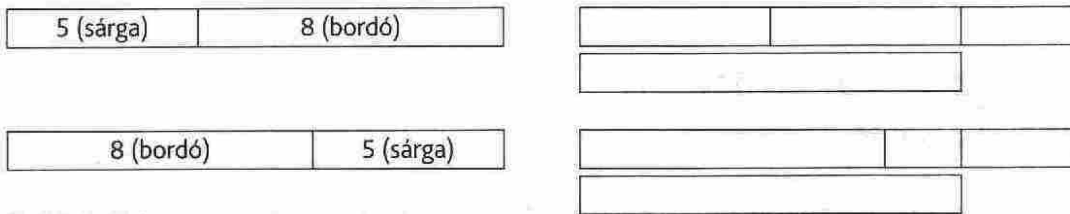
3. gyakorlat

Az összeadás felcserélhető (kommutatív) tulajdonságának megmutatása.

A színes rudakkal mutassuk meg a diákoknak, hogy mindegy, milyen sorrendben adunk össze két számot, az eredmény ugyanaz lesz. Mutassunk rá, hogy ha mindkét tag egyjegyű szám, ugyanolyan könnyű a kisebbel kezdeni, mint a nagyobbal.

Például az 5+8 összeget ugyanolyan eljárásban és ugyanannyi lépésben kapjuk meg, mint a 8+5-öt.

Példa: 5+8=8+5



Mindkét esetben az első tag határozza meg, hogyan kell bontani a másodikat. A bontás: a(z első számot 10-re) *pótló rész* és a *fennmaradó rész*.

A diákok ismételjék meg többször a gyakorlatot maguk választotta számokkal (két olyan egyjegyű számmal, amelyek összege nagyobb tíznél).

4. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadásának ábrázolása számegyenesen.

A 4. gyakorlat az összeadás számegyenesen való ábrázolásának két egyaránt helyes, de némiképp eltérő módját mutatja be. A diákok mindkettőt próbálják ki, hogy eldönthessék, melyiket alkalmazzák szívesebben. Hogy az ábrák a lehető legegyértelműbbek és jól érthetőek legyenek, beszéljük meg a diákokkal, hogy miért nem használunk pozitív és negatív előjeleket, sem az ugrás irányát jelző nyilakat (lásd az Áttekintést a fejezet elején).

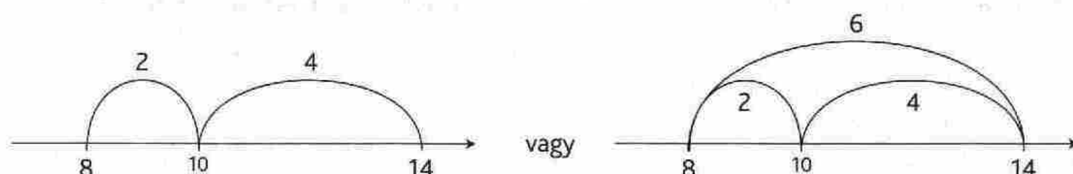
Mindkét módszert a 8+6 példáján mutatom be. Mindkettő a második összeadandó két részre bontásán alapul. A bal oldali ábrán bemutatott módszer két lépésben hajtja végre az összesen 6 egységnyi ugrást: előbb 2, majd 4 egységnyi lépésben. Közben a 10-et az átlépés középső megállójaként használjuk. A módszer hátránya, hogy az első lépés után a diáknak rá kell néznie a leírt feladatra, hogy meghatározza, mekkora lépésre van még szükség ahhoz, hogy készen legyen. A speciális matematikai nehézségekkel küzdő és/vagy gyenge rövid távú memóriával rendelkező diák ezen a ponton gyakran elveszti a fonalat, és nem tudja, hogyan folytassa a feladat megoldását.

A jobb oldali ábrán bemutatott módszerrel előbb egyszerre ugrunk 6 egységnyit, és ezt később osztjuk fel két kisebb ugrásra úgy, hogy a 10-et használjuk közben ugródeszkaként. A módszer előnye, hogy egyszerre teszi át a feladatot a számegyenesre, a diáknak tehát nem kell visszatekintenie az eredeti, írásba foglalt kérdésre. Ez a módszer kiküszöböli az első módszernél említett hátrányt: az első lépés megtétele után nem kell megszakítani a munkát, ami összezavarhatja és görcsössé teheti a diákot.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Példa: 8+6



A diákok az általuk választott módszerrel gyakorolják mindazokat az összegzéseket, amelyeket korábban az 1. és 2. gyakorlatban konkrétan végrehajtottak a színes rudakkal.

5. gyakorlat

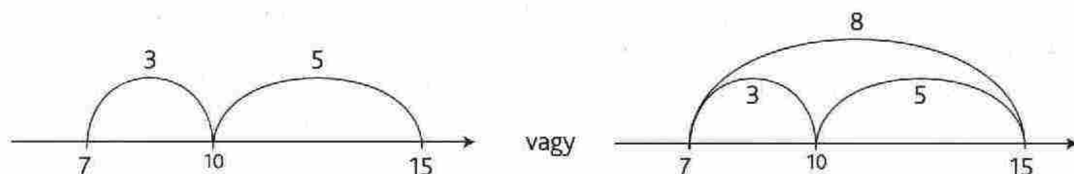
Számegyenes használata egyszerű kivonásoknak kiegészítő összeadásként való elvégzéséhez; csak 20 alatti számokkal és 10 alatti eredményekkel.

A diákokkal meg kell értetni, hogy a kivonás (pl. 15–7) megoldható úgy is, hogy megkeressük a megfelelő összeadásban (ebben az esetben: 7+□=15) a hiányzó tagot (lásd az 5. számú előismeretet a 2. fejezetben). A hiányzó tagú összeadást bemutathatjuk üres számegyenesen, a lejegyzéshez az előző gyakorlatban ismertetett két módszer bármelyikét használva. A számegyenesen az „egyenlővé tétel" (azaz *Mennyit kell hozzáadni x-hez, hogy y-t kapjunk?*) helyettesíthető a „különbség" fogalmával (azaz *Mennyi hiányzik x-hez, hogy y legyen?*).

Például a 15–7 műveletet elolvashatjuk *15-ből 7* vagy *Vonjunk ki 7-et 15-ből!* módon, de helyettesíthetjük a *7 meg mennyi az 15?* vagy *Mennyi hiányzik 7-hez, hogy 15 legyen?* kérdéssel is. A alábbi, bal oldali ábrán bemutatott módszer a követező: jelöljük meg a 7-et a számegyenesen, írjuk a jel alá a számot; aztán rajzoljuk meg a 10-ig megteendő ugrást (tízes átlépés), írjuk fölé ennek mértékét (vagyis: mennyi *pótolja ki* a 7-et 10-re); rajzoljuk meg a második ugrást, amellyel elérjük a megcélzott számot, jelöljük meg az ugrás végpontját (a 15-öt); számoljuk ki a második ugrás mértékét, és írjuk fölé. A 15–7 kivonás eredményét a két ugrás összegeként kapjuk meg.

A jobb oldali ábrán bemutatott módszer a következő: jelöljük meg és feliratozzuk a 7-es és a 15-ös helyét a számegyenesen; rajzoljunk egy nagy ugrást a két szám között; ezt 10-nél megszakítva (tízes átlépés) osszuk fel két kisebb ugrásra; számoljuk ki és írjuk fölé mindkét ugrás mértékét. A 15–7 kivonás eredményét a két ugrás összegeként kapjuk meg. Ennek a módszernek az az előnye, hogy az egész kérdést átteszi a számegyenesre, mielőtt nekifognánk a megoldás keresésének. Ugyanakkor előrelátást kíván a diáktól, hogy úgy helyezze el az ábráját a lapon, hogy elegendő hely maradjon az elvégzendő műveletek leírásához.

Példa: 15–7



(Folytatódik)

(Folytatás)

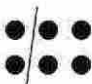
Mint látható, úgy oldottuk meg a feladatot a számegyenesen, hogy az ábrából többé nem olvasható ki, hogy az eredeti kérdés összeadásként vagy kivonásként volt-e megfogalmazva. Ez rögtön szembetűnik, ha összehasonlítjuk az ábrákat az előző gyakorlat ábráival. Az üres számegyenes használatának egyik legfőbb előnye, hogy a diáknak egyetlen egyszerű, mégis kulcsfontosságú módszert kell megtanulnia mint általános számolási stratégiát. Ennek gyakorlása során rögzül benne az összeadás és a kivonás matematikai kapcsolata. Hívjuk fel rá a figyelmet, hogy az eredeti kérdéstől függ, hol olvasható le az eredmény a számegyenesen: összegzés esetén az ugrásokkal elért legnagyobb szám az eredmény, kivonás vagy hiányzó tagú összeadás esetén pedig az ugrások együttes nagysága a végeredmény.

6. gyakorlat

A számegyenes elképzelése fejben végzett számításokhoz.

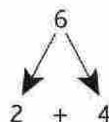
Miután már megoldottak néhány feladatot a 4. és 5. gyakorlat keretében, a diákok fordítsák le a papírt, amelyen eddig dolgoztak, és oldják meg újra ugyanezeket a feladatokat egy elképzelt számegyenesen.

Biztassuk a gyerekeket, hogy képzeljék maguk elé az összegzés minden lépését, de csak az eredményt mondják ki hangosan. A 8+6 összeadásban például képzeljék el, hogy a 6-ot felosztjuk 2+4 módon, de ezt ne mondják ki hangosan. Ehelyett csak annyit mondjanak: 8 ... 10 ... 14.



6 (lila)	
2	4 (piros)

(rózsaszín)



A 6 felosztása 2+4-re: három megjelenítési mód.

A diákok többféle módon fogják elképzelni, hogyan bontunk egy számot két részre. Egyesek felidézik a dominó pöttymintáit vagy a színes rudakat. Mások olyan alaposan elsajátították a tanultakat, hogy képesek számjegyekkel végrehajtani a bontást. (A képzelőerő fejlesztéséről lásd még a 4. fejezet 13. gyakorlatát.) Bár a diákok képesek kiválasztani a számukra legmegfelelőbb módszert a fejben való bontásra, egy tényleges összeadást valószínűleg a maguk elé képzelt számegyenesen tudnak a legjobban elvégezni. Az üres számegyenesen történő műveletvégzés igen eredményes és hasznos fejszámolási eszköz. Folytonos ismétléssel el kell érnünk, hogy a diák minden lehetséges helyzetben használja, amíg teljesen magabiztossá nem válik az alkalmazásában.

Ne hagyjuk ki ezt a lépést a tanítás során. Fontos, hogy a diákok ne váljanak egyetlen konkrét számolási eljárás vagy képszerű lejegyzési mód rabjává. Az eljárások és az ábrák nem arra valók, hogy receptet adjanak a jó válasz megtalálásához, hanem hogy világos, rugalmas és könnyen elképzelhető megjelenítési módot mutassunk velük a gondolkodási modellekhez.

Mit tanítsunk ezután?

A 4. fejezet lépésről lépésre leírt gyakorlatokat tartalmaz a 10 többszörösei átlépésének megtanításához.

4. FEJEZET

A 10 többszöröseinek átlépése

Áttekintés

Mint azt az előző két fejezetben már tárgyaltuk, az átlépés a legjobb fejszámolási módszer, amelynek segítségével az összeadás a számegyenes mentén való egyirányú mozgásként hajtható végre. Fontos, hogy ez a mozgás az egyenes mentén mindig előrefelé történik, és sosem egyszerre, egy lépésben, hanem két kiegészítő ugrással, amelyek között a 10 (vagy a 10 valamelyik többszöröse) megállóként, ugródeszkaként szerepel.

Bár maga az átlépés elvont tevékenység, célszerű, hogy a diákok előbb ténylegesen, színes rudakkal hajtsák végre és értsék meg a lényegét, és csak ezt követően tanulják meg üres számegyenesen, papíron ceruzával rögzíteni az eljárást. Ha a diákok mindig előrefelé, balról jobbra haladva dolgoznak a számegyenesen, egyszerűbbé válik a lejegyzés, hiszen nem kell a vonalak végére nyilat, a számok elé pozitív vagy negatív előjeleket tenniük (kivéve persze, ha negatív számokkal dolgoznak).

A biztos számfogalommal rendelkező diákok könnyen megtanulhatják a 10 többszöröseinek átlépését: esetükben a már ismert technika egyszerű kiterjesztéséről van szó. A diszkalkuliások vagy más tanulási nehézséggel küzdők számára azonban nem nyilvánvalóak a számrendszerbeli ismétlődő mintázatok (analógiák), ezért náluk fokozatosan kell bevezetni a technika magasabb számkörbeli alkalmazását.

A 10 többszöröseinek átlépése kettőnél több ugrást is igényelhet. Mindig arra buzdítsuk a diákokat, hogy a leghatékonyabban és legáttekinthetőbben számoljanak – ez általában az elvégzendő lépések számának csökkenését jelenti.

Ne feledjük, hogy az átlépés technikája nem csak az összeadások során használható. Az átlépés a kivonás kiegészítő összeadásként való végrehajtásának is rendkívül célszerű módja. Abból, hogy az összeadást a számegyenes mentén balról jobbra való mozgásként tanítjuk, még nem következik, hogy a kivonást az ellenkező irányú mozgásként kellene tanítani. A speciális matematikai nehézségekkel küzdő diákok számára általában komoly nehézséget okoz a visszafelé számolás. Ezért ezt soha ne erőltessük. Ha valamelyest már megbarátkoztak vele, akkor is csak egy vagy két kis lépést várjunk el tőlük. A kettőnél több lépéses visszafelé mozgás túlterheli az olyan speciális tanulási nehézséggel küzdő diák memóriáját, mint a diszlexia, diszpraxia vagy diszkalkulia.

Mielőtt megtanulnák az átlépés technikáját, a diákoknak biztos előismeretekkel kell rendelkezniük. Ezekről a 2. fejezetben szóltunk részletesen, amelyben tanítási-módszertani tanácsok is olvashatók az idősebb diákok oktatásához, akik még nincsenek e fontos képességek birtokában.

Ez a fejezet lépésről lépésre leírt javaslatokat tartalmaz a 10 többszörösei átlépésének tanításához. Egy sor egymásra épülő gyakorlatot közlünk a matematikai nehézségekkel küzdő diákok számára. A gyakorlatok számozása 7-tel kezdődik, mert az előző fejezetben tárgyalt 6 gyakorlat folytatásáról van szó.

A 10 többszörösei átlépésének tanulását szolgáló gyakorlatok

7. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben csak a tízesek száma különbözik.
8. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben ugyanaz az egyjegyű szám a hozzáadandó.
9. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben csak a kétjegyű szám egyeseinek értéke változatlan.
10. gyakorlat:	Az összeadás felcserélhetősége a kétjegyű számokra vonatkoztatva.
11. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz, számegyenesen.
12. gyakorlat:	A számegyenes használata kétjegyű számok kivonására, kiegészítő összeadásként, 10 alatti eredmény esetén.
13. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz, fejben.
14. gyakorlat:	A vizuális felidézés technikája egyszerű kivonások fejben való elvégzéséhez.
15. gyakorlat:	Egyjegyű szám hozzáadása három- vagy négyjegyű számhoz, kezdetben számegyenesen, azután fejben.
16. gyakorlat:	Kétjegyű számok összeadása, csak olyan esetben, amelyben az egyesek helyén van szükség átlépésre.
17. gyakorlat:	A számegyenes használata kivonásra, ha minden szám (az eredmény is) nagyobb 10-nél.
18. gyakorlat:	Két- és háromjegyű számok összeadása, ha a tízesek helyén van szükség átlépésre, 100-on vagy többszörösein is átlépve.
19. gyakorlat:	Kiegészítő összeadás és egymást követő átlépések, kétjegyű szám háromjegyűből való kivonása során.
20. gyakorlat:	Vegyes feladatok.
21. gyakorlat:	A 0 átlépése negatív számokhoz való hozzáadás során.

A 10 többszöröseinek átlépése

A 7. gyakorlat előtt

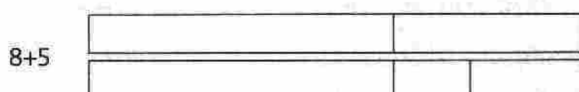
Bizonyosodjunk meg róla, hogy a diákok rendelkeznek a szükséges előismeretekkel (lásd a 2. fejezetet), és biztosan alkalmazzák a 10 átlépésének technikáját (lásd a 3. fejezet 1–6. gyakorlatát).

7. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben csak a tízesek száma különbözik.

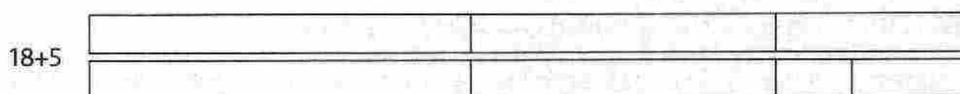
Kezdjük azzal, hogy felidézzük az 1. és 2. gyakorlatot (lásd az előző fejezetben), például a 8+5 összeg modellezését a színes rudakkal. Ha ezt megoldották, módosítsuk a feladatot 18+5-re.

8+5



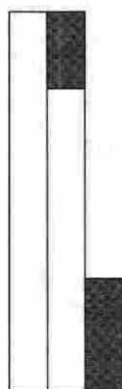
A 8+5 összeg meghatározását tízes átlépéssel és az 5 bontásával (2+3) végeztük el.

18+5

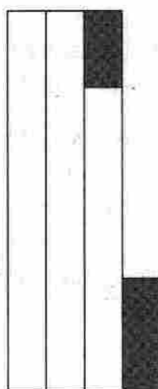


A 18+5 összeg meghatározását szintén átlépéssel és az 5 bontásával (2+3) végezzük el.

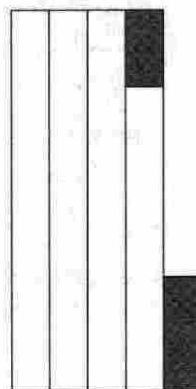
A 8+5 összegzésnél lerakott színes rudakat forgassuk át függőleges elrendezésbe: a narancssárga rúd álljon balról (a tízesek helyén), mellette az egyesek. Ez az elrendezés jól mutatja, hogy a 18+5 összegzés esetén is ugyanúgy kell bontani az 5-öt (a 8-at 10-re) *pótló rész*re és a *fennmaradó rész*re.



18+5



28+5



38+5

A 10 feletti számokat célszerű külön tízesekbe és egyesekbe csoportosítani az átlépéshez.
A 8+5 összegzést kapcsoljuk össze a 18+5, majd a 28+5, 38+5 stb. összegzésekkel.

Ezután adjunk fel a diákoknak kapcsolódó feladatokat: 28+5, 48+5, 38+5 stb.

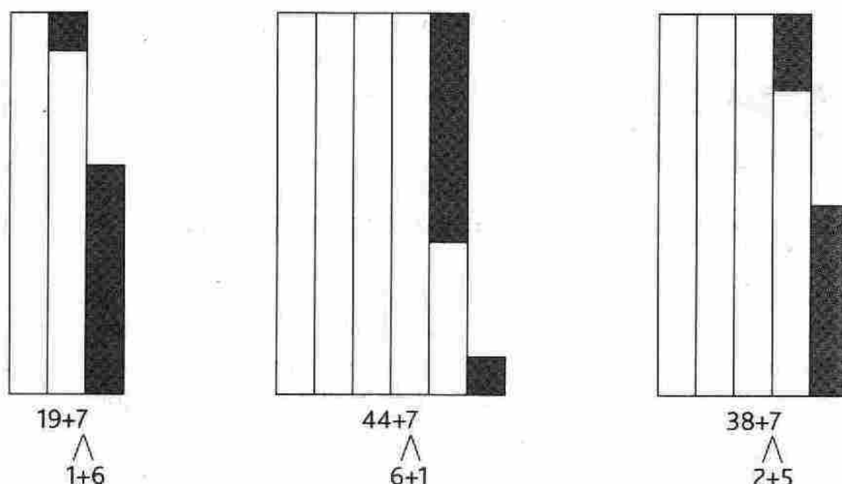
Adjunk fel ismétlésként az 1. és 2. gyakorlat során megoldott más feladatokat is, például a 8+7-et. Ismét fordítsuk át a rudakat függőleges helyzetbe, tízeseket és egyeseket létrehozva. A problémát terjesszük ki a 18+7-re, azután az 58+7-re, 28+7-re stb.

Folytassuk ezt tovább ugyanígy, újabb és újabb csokornyi példában hozzáadva egyjegyű számot kétjegyűhöz, mindig csak a tízesek számát változtatva egy példacsokron belül.

8. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben ugyanaz az egyjegyű szám a hozzáadandó.

Modellezzünk egy összegzést – például: 26+7 – a fenti módon rudakkal. A kétjegyű szám rúdjait rendezzük külön tízesek és tőlük jobbra álló egyesek oszlopaiba. Ez már a helyiértékek oszlopaira hasonlító elrendezés (mivel a tízesek külön gyűjtve, az egyesektől balra állnak), ugyanakkor világosan mutatja, hogy a második összeadandót fel kell bontani *pótló részre* és *fennmaradó részre*. Gyűjtsünk egy csokorba további feladatokat, amelyekben ugyanazt az egyjegyű számot adjuk hozzá különböző kétjegyűekhez; például: 19+7, 44+7, 38+7, 157+7 stb.



Bár ugyanazt a számot adjuk hozzá különböző kétjegyű számokhoz, a 7-et különböző módokon kell összetevőkre bontani, az első összeadandó egyeseinek értékétől függően.

Adjunk fel további feladatokat, amelyekben mindig ugyanazt az egyjegyű számot (de ezúttal már nem a 7-et) kell hozzáadni különböző kétjegyű számokhoz.

Ezek a gyakorlatok megerősítik a diákokban az 1. és 2. gyakorlat tanulságait: az átlépést igénylő összegzésekben a második tagot kell bontani, de a bontás módját az első tag egyeseinek értéke határozza meg.

9. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz. Analógiára épülő feladatok végzése, amelyekben csak a kétjegyű szám egyeseinek értéke változatlan.

Folytassuk a színes rudak használatát. Példa egy csokornyi feladatra ebben a gyakorlatban: 17+6, 27+5, 57+8, 47+7, 77+4 stb.*

* Ez a gyakorlat azt a felismerést adja meg és mélyíti el, hogy ilyenkor a második tag bontásának első összetevője (a *pótló rész*) mindig ugyanakkora. (A ford. megjegyzése)

10. gyakorlat

Az összeadás felcserélhetőségének újbóli vizsgálata, egyjegyű szám kétjegyűhöz való hozzáadása során.

Használjuk a rudakat legalább egy összeadás-pár vizsgálatához. Ugyanaz lesz az 5+28 összeadás eredménye, mint a 28+5-é? [Igen.] Ugyanolyan egyszerű 5-tel kezdeni az összeadást, mint 28-cal? [Nem.]

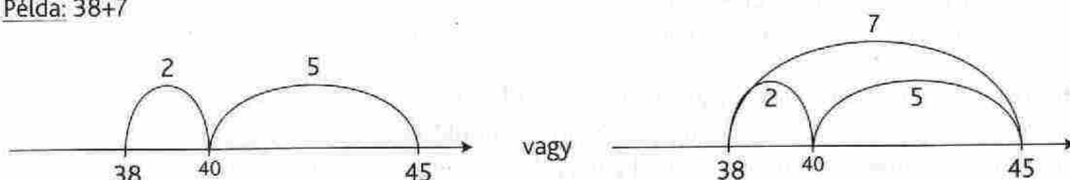
Emlékeztessük a diákokat a 3. gyakorlatra, amelyben megfigyelték, hogy egyjegyű számok összeadásakor mindegy, melyikkel kezdik a műveletet. Mutassuk meg nekik, hogy az összeadást csak akkor érdemes feltétlenül a nagyobb számmal kezdeni, ha az egyik tag több jegyű, mint a másik.

11. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz, számegyenesen.

Az előző gyakorlatok (7–10. gyakorlat) feladatait vegyesen adjuk fel a diákoknak, hogy oldják meg papíron, ceruzával, üres számegyenesen. A 4. gyakorlatban tapasztalttól eltérően most nem a 10, hanem annak valamely többszöröse szolgál megállóként, ugródeszkaként a számegyenesen jelölt két ugrás között. Hagyjuk, hogy a diák válasszon, melyik módszerrel boldogul jobban: a két egymást követő ugrással vagy az egy nagy (a kérdést egészben a számegyenesre áttevő) ugrással, amelyet később oszt fel két lépésre.

Példa: 38+7



12. gyakorlat

A számegyenes használata kétjegyű számok kivonására, kiegészítő összeadásként, 10 alatti eredmény esetén.

Idézzük fel az diákokkal az 5. gyakorlatot, amelyben megtanulták a 15–7 kivonás megoldását a 7+□=15 összeadás hiányzó tagjának, vagy a számegyenesen a 7 és 15 közti távolságnak a meghatározásával. Adjuk fel újra az előző, 11. gyakorlat néhány feladatát kivonásként, amelyeket kiegészítő összeadással oldjunk meg a számegyenesen. Biztos, hogy csupa egyjegyű számot kapunk eredményül. Például a 45–38 kivonást fogalmazzuk át 38+□=45 módon, azaz találjuk meg a 38 és 45 közti távolságot a számegyenesen. Ez az előző ábrán bemutatott 38+7 összeadással egyező eljárást igényel. Emlékeztessük a diákokat, hogy a kivonás eredményét a két ugrás nagyságának összegeként kapjuk meg, hiszen két szám közti távolságot keresünk – szemben egy összeadásos feladattal, amelynek az eredménye egy szám a számegyenesen.

13. gyakorlat

Egyjegyű szám hozzáadása kétjegyűhöz, fejben, a vizuális felidézés technikájával.

Ugyanazokat a feladatokat adjuk fel, mint a 11. gyakorlat során, most azonban fejben végezzék el a diákok a műveleteket. Képzeljék maguk elé a megoldás menetét, miközben hangosan kimondják a megoldás állomásait (például a részösszegeket) a végeredmény felé haladva. Például a 38+5 összeadás során maguk elé kell képzelniük az 5 bontását 2+3-ra, de hangosan csak a „38 ... 40 ... 43" számokat mondják ki.

A legjobb módja annak, hogy a diákokat a fejben végzett feladatmegoldására szoktassuk, ha vizuálisan felidéztetjük velük a számegyenessel való korábbi (a 11. gyakorlat során végzett) tevékenységüket. Képzeljék maguk elé a számegyenest egy papírlapon. Azoknak, akik ezt túl nehéznek találják, további tényleges gyakorlásra van szükségük papíron, ceruzával.

Több módja is van, hogy elképzeljük a második összeadandó bontását az átlépéshez. Az egyik a számjegy felosztása összetevő párokra (azon diákok számára, akik már nem ragadnak le a pöttymintázatok vagy a színes rudak képszerű felidézésénél). Akik eleget gyakorolták a háromszög formájú felosztást (lásd 2. fejezet, 3. előismeret), azok könnyen boldogulnak ezzel. Például a 46+7 feladat során úgy tekintenek az összegzésre, ahogyan az itt le van írva. A 7-et képesek képzeletben felosztani az első szám *pótló rész*ére és a *fennmaradó rész*re, azaz 4+3-ra (ahogyan az az alábbi, bal oldali ábrán látható). Ezután már csak a három fontos számra figyelnek, miközben megfogalmazzák a rész- és végeredményt: „46 ... 50 ... 53".

A fejben való bontás másik módja, ha a hozzáadandó (egyjegyű) szám bontott részeit mint egymás mögötti rétegeket, lapokat képzeljük el (lásd az alábbi ábrán jobbra). A 46+7 példánál maradva: a diák elképzelheti a 7-est, amelyet egy valamelyes vastagsággal rendelkező dolog – például egy deszka – képvisel, és amelyet két rétegre vágunk szét. A hátsó (vagy alsó) réteg a *pótló rész* (esetünkben a 4), amely hozzátapad az első összeadandóhoz, egy kerek számot alkotva vele. A felső réteg mintegy fennmarad, „szabadon úszik": ez a *fennmaradó rész* (esetünkben a 3). Bemutathatjuk ezt a gyerekeknek két, egymásra helyezett kezünkkel is: ezek együtt jelentik az egész hozzáadandót. Felső kezünket felemelve megjelenik a két, egymásra épülő réteg, sorban jelezve a két összetevőt. Ez sokkal szemléletesebb magyarázat, mint az írásos levezetés.

<u>Példa:</u> 46+7

46+7 = 46+ 7 → 4+3   vagy   46+ [7] =46+ [4] [3]

A diák tetszés szerinti módszerrel elképzeli a második tag bontását, és csak az eredményhez vezető lépéseket közli: 46 ... 50 ... <u>53</u>.

Fontos, hogy a feladat, a kérdés mindig le legyen írva; a gyereknek ne kelljen fejben tartania, miközben a megoldáson gondolkodik.

14. gyakorlat

A vizuális felidézés technikája kivonások fejben való elvégzéséhez. Ezen a szinten az eredmény még legyen egyjegyű szám.

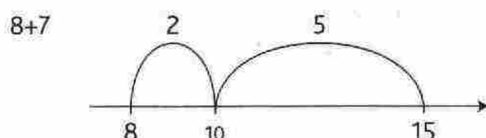
Az előző gyakorlatban leírt vizualizációs technikákat alkalmazzuk a kivonások (kiegészítő összeadásként való) megoldása során is. Bőségesen adjunk a diákoknak gyakorló feladatokat, hadd próbálkozzanak. Fontos, hogy legalább annyiszor gyakoroljanak kivonni, mint összeadni, különben többségük sokkal nehezebbnek fogja találja a kivonást.

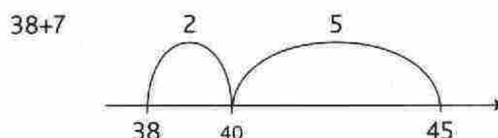
15. gyakorlat

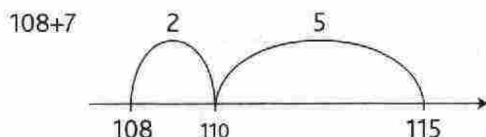
Egyjegyű szám hozzáadása három- vagy négyjegyű számhoz, kezdetben számegyenesen, azután fejben.

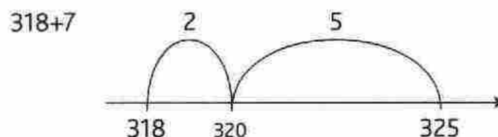
Csupa egyjegyű számot megadva egy összeg második tagjaként, ez a gyakorlat azt mutatja meg a diákoknak, hogy az átlépés megismert technikája a százas vagy az ezres számkörben is alkalmazható. Például, ha a diák már tudja, hogyan adjon 7-et a 8-hoz, 18-hoz, 28-hoz, 38-hoz stb., akkor ugyanilyen könnyen tud adni 7-et olyan számokhoz, mint a 108, 318, 1638 vagy 5078. Hívjuk fel a diákok figyelmét arra, hogy bár nagyobb számokról van szó, ezek a műveletek is megoldhatók két lépéssel vagy két ugrással az üres számegyenesen.

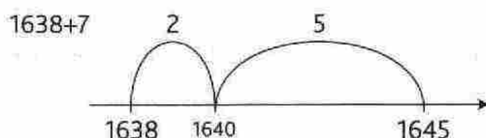
Minden olyan feladatcsokorban, amelyben mindkét összeadandó egyesei azonosak, a számegyenesen végzett két ugrás is azonos lesz. (Az említett példáknál minden esetben 2 és 5 nagyságú ugrásokat kell tenni.)

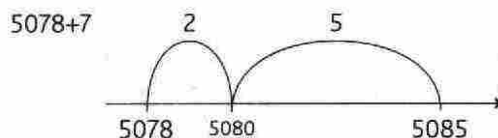












(Folytatódik)

(Folytatás)

Ugyanilyen feladatsorokat kivonásként is megadhatunk; például: 45–38, 535–528 stb. Mivel a kivonást kiegészítő összeadásként oldjuk meg, a számegyenesen itt is mindig csak két ugrásra lesz szükség.

Miután két vagy három hasonló feladatot megoldottak az üres számegyenesen, a diákok tegyék félre a papírt és a ceruzát. Az általuk választott vizualizációs technikával (lásd a 13. gyakorlatot) oldják meg ugyanezeket a feladatokat fejben.

A kérdés mindig legyen leírva, hogy a gyerekek memóriáját ne a feladat fejben tartása foglalja le.

16. gyakorlat

Kétjegyű számok összeadása, csak olyan esetben, amelyben az egyesek helyén van szükség átlépésre.

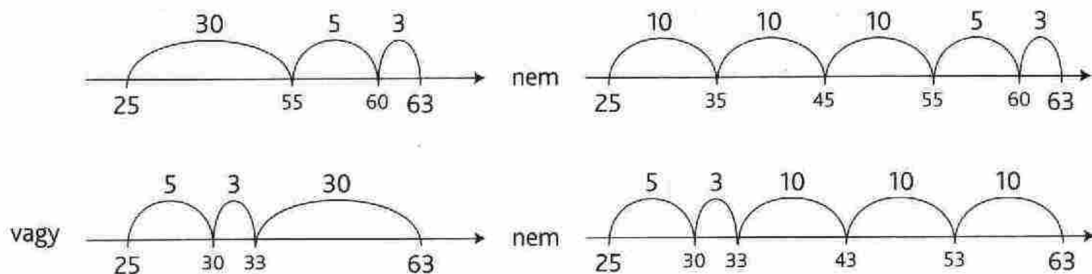
Először csak kisebb számokkal dolgozzunk, hogy a feladat könnyen modellezhető legyen színes rudakkal.

Oldjunk meg néhány összeadást a színes rudakkal, majd az üres számegyenesen. Eközben hagyjuk a diákokat kísérletezni, hogy előbb a tízeseket vagy előbb az egyeseket adják hozzá az első számhoz. Mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai. Célszerű hagyni, hogy a diákok maguk válasszanak: alkalmazzák azt a sorrendet, amelyik nekik tetszik.

Azt nem javaslom, hogy mindkét kétjegyű számot tízesekre és egyesekre bontsuk. Az első tagot kezelhetjük egyben – ha a két tag ugyanannyi jegyű, mindegy, melyik az „első". Csak a második tagot kell tízesekre és egyesekre bontani (vagy egyesekre és tízesekre, a diák választása szerint). Ezen a szinten még célszerű egymás után írni az összeadandókat, és nem egymás alá, hogy ne késztessük a gyereket mindkét tag bontására és írásbeli (helyiérték-oszlopos) összeadásra.

Amikor a diákok az üres számegyenesen dolgoznak, ragaszkodni kell hozzá, hogy a lehető legkevesebb ugrást, azaz számolási lépést hajtsák végre. Gyakorolják a 10 többszöröseit egyben (és ne külön tízenként) hozzáadni egy számhoz, továbbá egyjegyűeket is egyszerre, tömbként adjanak egy számhoz (és ne egyesével). Például a 25+38 összeadás megoldható három ugrással; mindegy, hogy a tízeseket vagy az egyeseket adjuk előbb hozzá az első számhoz (lásd az alábbi ábrán balra). Viszont ne engedjük a gyerekeket a jobb oldali módszer szerint számolni. Ehelyett meg kell tanulniuk minél kevesebb részre bontani a második tagot.

<u>Példa:</u> 25+38



A diák kezdheti a műveletet a tízesek vagy az egyesek hozzáadásával, de próbálja meg csökkenteni az ugrások számát.

(Folytatódik)

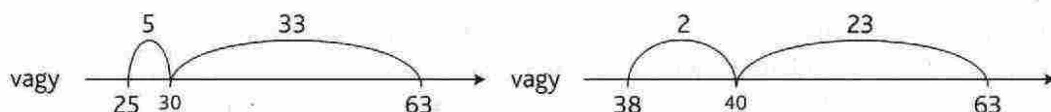
(Folytatás)

Azok a diákok, akik nehezebben boldogulnak a tízesek egyben való kezelésével az összeadás során, talán külön gyakorlásra szorulnak a 2. fejezetben részletezett előismeretek közül az utolsó néhányból. Az üres számegyenes nyújtotta előnyök elvesznek, ha a művelet négynél több ugrásból áll, hiszen a végcél az, hogy a diák képes legyen fejben számolni. Az üres számegyenes nem csupán egy papíron, ceruzával alkalmazható technika, hanem egy gondolkodási modell is, amely elvezet a hatékony, gyors és magabiztos fejben számoláshoz.

A hozzáadás tízesekkel való kezdésének nagy előnye, hogy a diák a tagokat és az egész összegzést folyamatosan, balról jobbra olvasva át tudja tekinteni. Így könnyebb fejben tartani, hol is tart, mi a következő lépés, és mikor éri el az eredményt. A feladatban szereplő számok valódi nagysága végig szem előtt van, és már a legelső lépés után megközelítjük a végeredményt. Ez a számokat egyben kezelő fejszámolási módszerek általános előnye az („oszlopos") írásbeli összeadással szemben, amely helyiértékek szerinti részekre bontja a számokat, és ezeket a részeket külön egységekként kezeli.

Az egyesek hozzáadásával való kezdés előnye, hogy a diákok egy része azonnal átlátja: a feladat háromnál kevesebb ugrással is megoldható (lásd a következő ábrát). Ez a korábbi gyakorlatokban megismert módszer egyenes kiterjesztésének tekinthető, hiszen a diákok az egyjegyű szám hozzáadását is úgy gyakorolták a számegyenesen, hogy első lépésben hozzáadták az első szám (következő 10-többszörösre) *pótló részét*, második lépésben pedig a második szám *fennmaradó részét*.

Példa: 25+38 vagy 38+25



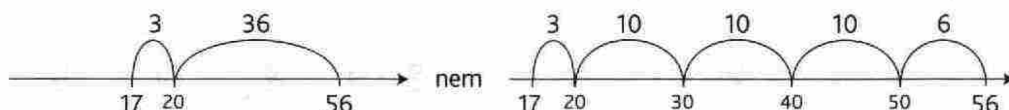
17. gyakorlat

A számegyenes használata kivonásra, ha minden szám (az eredmény is) nagyobb 10-nél.

A számegyenesen végzett kivonások során ugyanúgy figyeljünk az ugrások számának csökkentésére, mint az összeadásoknál (lásd a 16. gyakorlatot). Valamennyi ilyen típusú műveletet kiegészítő összeadásként kell megoldani, mindössze két lépésben.

Például az 56–17 kivonás megoldható két ugrással az üres számegyenes mentén (lásd az alábbi ábrán balra). A jobb oldali ábrán bemutatott módszert nem javasoljuk. Bár helyes végeredményt ad, az eredményhez öt ugrással jut el.

Példa: 56–17



(Folytatódik)

(Folytatás)

Elfogadható kompromisszum, ha a diák három ugrással oldja meg a feladatot: az elsőben a *pótló részt*, a másodikban az összes tízest együtt, a harmadikban a *fennmaradó részt* hozzáadva. Esetleg további konkrét gyakorlásra lehet szükség a színes rudakkal a többjegyű számok felépítése és részekre bontása terén (lásd 2. fejezet, 10. előismeret), mielőtt a diákok könnyedén egybe tudnák foglalni a második és harmadik ugrást.

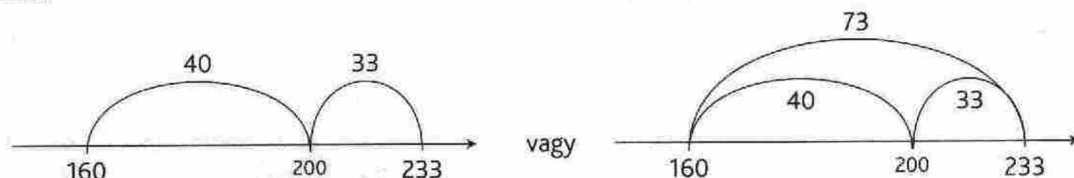
A diákoknak sokat kell gyakorolniuk a kivonás átfogalmazását kiegészítő összeadásra, mielőtt az üres számegyenesen keresni kezdik a megoldást. Ha már képesek ilyen feladatokat papíron, ceruzával két ugrással megoldani, akkor megpróbálhatják fejben is, a 13. gyakorlatban ismertetett vizualizációs technikákkal.

18. gyakorlat

Két- és háromjegyű számok összeadása, ha a tízesek helyén van szükség átlépésre, 100-on vagy többszörösein is átlépve.

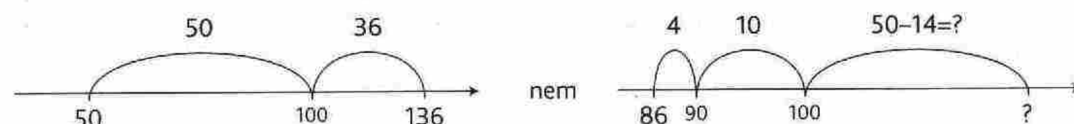
Olyan feladatokkal kezdjünk, amelyekben 10 többszöröseit adjuk össze, 100-as átlépéssel; például: 40+80. Ezt már csak számegyenesen modellezzük, konkrét szemléltetőeszközökkel nem. Folytassuk olyan feladatokkal, amelyekben csak az első tag többszöröse a 10-nek; például: 90+45, 160+73.

Példa: 160+73



Mutassuk meg, hogyan lehet ugyanilyen eljárással kiszámolni azon összegzéseket, amelyekben a második tag kerek szám. Például a 86+50-et írjuk át 50+86-ra, és lépjük át a 100-at két ugrással. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint ha a 86-tal kezdenénk, még ha ez is a nagyobbik szám, és a gyerekek gyakran úgy vélik, mindig könnyebb a nagyobbal kezdeni. Ebben a példában egyáltalán nem könnyű felbontani az 50-et 4-re plusz 10-re plusz az ezen felüli részre, mert az 50 és 14 különbségének meghatározása újabb, külön művelet, amelyet írásban vagy egy másik számegyenesen, átlépéssel lehet elvégezni.

Példa: 86+50



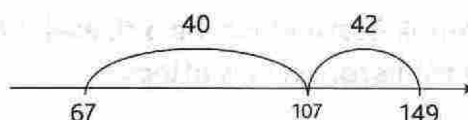
(Folytatódik)

(Folytatás)

Amellett, hogy a diákoknak ilyen összegek kiszámítását tűzzük ki, tegyük próbára őket azzal is, hogy maguk alkossanak a tízes helyiértéken a 100-at vagy annak többszöröseit átlépő összeadásokat. Hasznos, ha gondolkodásuk nemcsak a kérdések, feladatok megválaszolására irányul, hanem hasonló kérdések megfogalmazására is. Két, tizesével és egyesével számozott, tízoldalú dobókával dobva – vagy egy listából véletlenszerűen kiválasztva – adjunk meg nekik egy kétjegyű számot. Ehhez olyan két- vagy háromjegyű kerek számot kell találniuk, amelyet az első számhoz hozzáadva a megoldás a tízes helyiértéken a 100 (vagy valamely többszöröse) átlépését igényli. Például a 67 esetén a második tag lehet 80 vagy 250, vagy bármely olyan kerek szám, amelynek tízes helyiértékén 4-nél nagyobb szám áll.

Szigorúan véve azok az összegek, amelyekben egyik összeadandó sem kerek szám, szintén megoldhatók a tízes helyen való átlépéssel, ha az egyesek összege nem haladja meg a 10-et. Például a 67+82 összeadás két lépésben megoldható, így jól szemléltethető az üres számegyenesen tett két ugrással (lásd az ábrát).

Példa: 67+82



Ez a művelet korántsem magától értetődő, hiszen a „megálló", az ugródeszka nem 10 vagy 100 valamely többszöröse. Gyakran az átlépést már értő és fejben jól alkalmazó diákok is nehezen ismerik fel, hogy mely feladatok oldhatók meg így. Ezért én az ilyen feladatok megoldásához más, úgynevezett „szétválasztó módszereket" javaslok (lásd az alábbiakban), vagy hagyományos írásbeli összeadást. Éppen ezek a szétválasztó módszerek vezetnek el az írásbeli számításhoz,[1] ami nem a számegyenesen való munka egyszerű meghaladása.

Egy feladat szétválasztással történő megoldása nem jelenti azt, hogy az átlépés egyáltalán ne kapna benne szerepet. Egy olyan összeg meghatározása, mint a 67+82, mindenképpen fejben végrehajtott átlépéssel jár, akár egy vízszintes sorban, akár függőleges oszlopokban számoljuk ki.

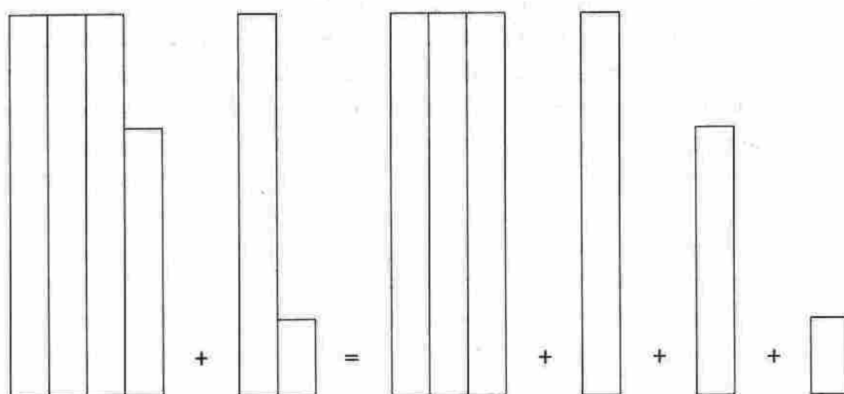
A szétválasztások leírásának két hasznos módját mutatjuk be a gyakorlat végén. Mindkét jelölés alkalmas a vizuális felidézésre, így a fejben végzett számolás támogatására. Mindkét módszer működik, akár az egyesekkel kezdünk (mint az írásbeli összeadásban, jobbról balra haladva), akár a legnagyobb helyiértékkel (balról jobbra). Hagyjuk a diákot, hogy válassza a neki megfelelőbbet, de azután következetesen ezt használja.

A szétválasztó módszereket érdemes először színes rudakkal szemléltetni, hogy a diákok lássák, mindössze a feltett kérdés átfogalmazásáról van szó, nem egy új összeadási (vagy kivonási) módszerről. Szétválasztjuk egymástól a tízeseket és az egyeseket, majd külön összegezzük őket. Például a 37+12 kiszámításakor a 30+10 egy részösszeg, a 7+2 egy másik részösszeg, és ezeket adjuk össze a végeredmény eléréséhez. Hogy a művelet során (akár a részösszegekben, akár azok összeadásakor) szükség van-e átlépésre, az a konkrét számoktól függ. A 37+12 nem igényel átlépést, a 67+82 a tízes helyiértéken igen.

(Folytatódik)

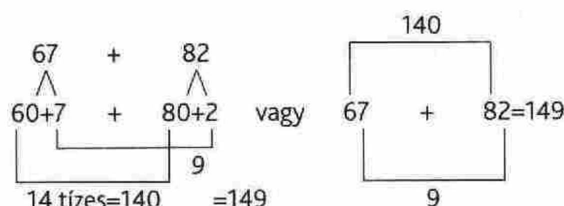
(Folytatás)

Példa: 37+12



A szétválasztó módszer átfogalmazza a kérdést az egyes helyiértékeken végzett összeadásokra.

Példa: 67+82



A szétválasztó módszer alkalmazásakor gyakran van szükség fejben végzett átlépésre.

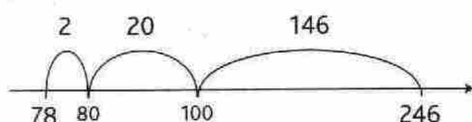
19. gyakorlat

Kiegészítő összeadás és egymást követő átlépések, kétjegyű szám háromjegyűből való kivonása során.

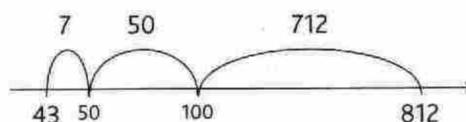
Ebben a gyakorlatban olyan feladatok kerülnek sorra, amelyekben egymást követő átlépések történnek, azaz az egyesek helyén át kell lépni a 10-en (vagy valamely többszörösén), a tízesek helyén pedig a 100-on (vagy valamely többszörösén).

Ilyen, egymást követő átlépéseket igénylő kivonások például a 246–78 vagy a 812–43. Ezeket a műveleteket a számegyenes mentén csak három lépésben lehet megoldani (lásd az ábrát).

Példa: 246–78



821–43



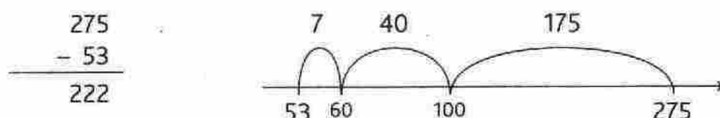
(Folytatódik)

(Folytatás)

Számos, a fentiekhez hasonló feladat olyan méretű ugrásokat tartalmaz, amelyeket nem könnyű összegezni. Például a 275–53 megoldásakor az ugrások (175+40+7) összegzése még több átlépést igényel a tízesek és az egyesek helyén egyaránt. Ugyanennek a kivonásnak az írásbeli végrehajtása jóval egyszerűbb, mert szétválasztással megoldható, mindenféle bontás nélkül.

Ezen a ponton érdemes felhívni a diákok figyelmét arra, hogy bizonyos kivonásokat egyszerűbb kiegészítő összeadásként elvégezni a számegyenesen, mint írásban – de vannak fordított esetek is.

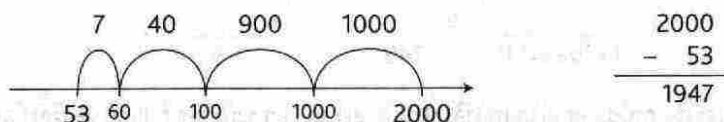
Példa: 275–53



Bizonyos kivonásokat sokkal egyszerűbb írásban elvégezni, mint átlépéssel a számegyenesen.

Azok a kivonások, amelyekben bontás (sőt több egymást követő bontás) szükséges, könnyebben elvégezhetők kiegészítő összeadásként a számegyenesen, mint írásban. Az átlépés az üres számegyenesen kivételesen hasznos módszer, ha 100 vagy 1000 többszöröse a kisebbítendő – ami gyakran előfordul, ha mérési adatokkal (hosszúság, tömeg stb.) dolgozunk.

Példa: 2000–53



Az átlépés a számegyenesen sokkal egyszerűbb, mint a bontást igénylő írásbeli kivonás.

A 9. fejezetben szerepel egy „ellensúlyozó" módszer a 100 vagy 1000 többszöröséből való írásbeli kivonásra, amely azon alapul, hogy a 9 az majdnem 10.

20. gyakorlat

Vegyes feladatok.

Már az is szép eredmény, ha a diák képes megoldani olyan feladatokat, amelyekhez hasonlót kevéssel azelőtt mutatott be a tanár, vagy ha képes megbirkózni olyan feladatokkal, amelyek egyetlen egyszerű módszer rutinszerű alkalmazását igénylik. Ennél jóval magasabb szintet jelent, ha a diák egy konkrét feladat esetén képes kiválasztani a tanult módszerek közül az éppen megfelelőt. Hogy megbizonyosodjuk róla, diákjaink mennyire sajátították el az átlépés technikáját, adjunk fel nekik egy sor, véletlenszerűen összeválogatott feladatot az eddig ismertetett húsz gyakorlat közül. Keverjünk közéjük néhány olyan összeadást és kivonást is, amely nem igényel átlépést.

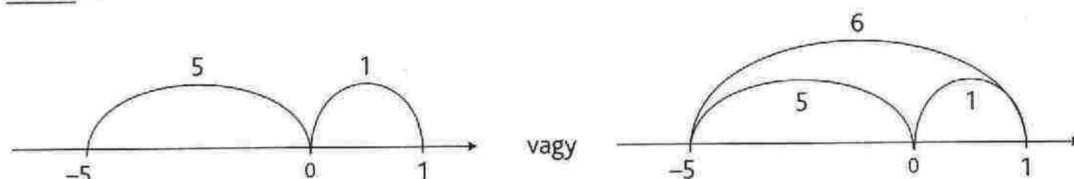
21. gyakorlat

A 0 átlépése negatív számokhoz való hozzáadás során.

A számegyenest kiterjeszthetjük a nullától balra is, megmutatva, hogy ott találhatók a negatív számok. A számegyenesnek ez a része mintegy tükörképe a pozitív számokat tartalmazó résznek, amelyen a diákok már otthonosan mozognak. Jelöljük meg a negatív számokat, és segítsünk a gyerekeknek felismerni, hogy ezek értéke kisebb nullánál.

Fontos, hogy a számegyenes segítségével megmutassuk és vizuálisan rögzítsük a negatív számokat, bevezetve az irány fogalmát. A pozitív irányú, azaz balról jobbra való mozgás az egyre nagyobb számok irányába halad; a negatív, azaz jobbról balra való pedig az egyre kisebb számok irányába. Így egy olyan feladatot, mint a –5+6, nem szükséges átírni 6–5 alakra. A megoldás során elindulhatunk a –5-től, amely 5 egységgel balra található a 0-tól, majd 6 egységnyit lépünk előre. Ne hagyjuk, hogy a diák egyesével lépegessen hatot. Találja meg a megoldást két ugrással, átlépve a nullát (lásd az ábrát).

Példa: –5+6



Ez előkészíti az irányított számokkal való későbbi munkát, azaz a vegyesen pozitív és negatív számokkal végzett összeadásokat és kivonásokat.

Hivatkozás

1 I. Thompson (2003) 'Deconstructing the National Numeracy Strategy's Approach to Calculation', ch. 2 in *Enhancing Primary Mathematics Teaching*, ed. I. Thompson, Open University Press.

III. RÉSZ

A szorzás és az osztás területi modellje

5. FEJEZET

Előismeretek a szorzás és az osztás területi modelljéhez

Áttekintés

A szorzás tulajdonképpen ismételt összeadás. Az összeadás általában különböző számokkal, mennyiségekkel dolgozik, a szorzás viszont egyazon szám vagy mennyiség többszöri összeadását jelenti. Ez alkalmat ad gyakran felmerülő tudáselemek átismétlésére, például a szorzótábla gyakorlására (10·10-ig). Mivel a gyenge memóriájú, nehezen tanuló, de könnyen felejtő diák éppen ezeket nem tudja megbízhatóan, ezen a területen is segítségre van szüksége.

Az osztást úgy kell bevezetni, mint a szorzás megfordítását, de az ismételt összeadáshoz kapcsolva, nem az ismételt kivonáshoz. A diákok többsége – még a matematikából jól teljesítők is – könnyebbnek találja az előrefelé való számolást, mint a visszafelé haladót. A matematikai nehézségekkel küzdők általában nem képesek egy vagy két lépésnél többet visszafelé számolni vagy következtetni. Ezért minden diáknál célszerű az osztást is előrefelé való számolási eljárásként tanítani, amelynek során egy állandó számot vagy mennyiséget addig adunk össze, amíg el nem érjük a megcélzott értéket.

A középiskolába kerülő diákoknak* már biztos, megalapozott előismeretekkel kell rendelkezniük. Ez a fejezet olyan diákoknak a tanításához ad javaslatokat, akik ebben az életkorban még mindig nincsenek birtokában ezeknek a lényeges fogalmaknak és ismereteknek.

A szorzás és az osztás területi modelljéhez szükséges előismeretek

1. Számlálás.
2. Egyszerű összeadások fejben, beleértve az átlépést igénylőket is.
3. A számok globális egységként, tömbként (nem csak egyesek halmazaként) való kezelése.
4. Kétszerezés és felezés.
5. Helyiértékes számírás, benne a tizedes törtekkel.
6. Többjegyű számok felépítése és részekre bontása.
7. A szorzótábla, avagy hogyan vezessük le az egészet néhány csomópontból.
8. A szorzás lényegének, a szorzás és az osztás közti alapvető kapcsolatnak a megértése.

* Ez Angliában a 11 éves kort jelenti, Magyarországon tehát inkább a felső tagozatosokra vonatkozik. (A ford. megjegyzése)

A szorzás és az osztás területi modelljéhez szükséges előismeretek

1. Számlálás

Az ilyen korú diákok általában nemcsak egyesével, hanem kettesével, ötösével, tízesével is képesek számlálni, hosszasan is, mindenféle konkrét szemléltetőeszköz nélkül. Akik nehezen számlálnak hármasával és négyesével, azoknak szemléltetőeszközökkel megmutathatjuk, hogy az effajta számlálás nem más, mint egyenlő mennyiségek ismételt összeadása. Az ötnél nagyobb lépésekben történő számláláshoz a diáknak tudnia kell fejben tízes átlépést végezni, hogy elkerülje az egyesével való számlálás csapdáját (lásd a 2–4. fejezetet).

Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- fejben való számlálás kettesével, ötösével, tízesével,
- váltott számlálás (a kettesével, ötösével, tízesével való számlálás véletlenszerű váltogatása, szakaszonként),
- 2-től és 5-től eltérő, kis számokkal való számlálás gyakorlása szemléltetőeszközökkel, például színes rudakkal egy centiméter-beosztású skála mentén (vagy ilyen célra készített vályúban),
- 2-től és 5-től eltérő, kis számokkal (például hármasával, négyesével) való számlálás gyakorlása a szemléltetőeszközök használata után fejben,
- számlálások mindig más kezdőponttól,
- tetszőleges lépésközzel végzett számlálás: előrefelé két- vagy háromlépésnyit, visszafelé csak egy- vagy kétlépésnyit,
- az egyenlő lépésekben való számlálás, illetve a különböző skálák rajzolása és leolvasása közötti kapcsolat bemutatása.



A különböző skálák rajzolása és leolvasása szorosan kapcsolódik az egyenlő lépésekben való számláláshoz.

2. Egyszerű összeadások fejben, beleértve az átlépést igénylőket is

A 2–4. fejezetekben részletesen bemutattuk, hogyan lehet megtanítani a diákoknak a tízes átlépés technikáját. Mielőtt szorzásra és osztásra kerülne a sor, a diákoknak már megfelelő gyakorlatot kell szerezniük az átlépésben, tudniuk kell bármely számhoz egyjegyű számot hozzáadni fejben, olyan vizualizációs technikákkal, mint az üres számegyenes elképzelése.

Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- bármely (egyjegyű) szám 10-re való kiegészítése, pótlása fejben
- egyjegyű számok bontása két összetevőre
- üres számegyenes megrajzolása papíron, illetve a számegyenes használata, amíg az eljárás természetes és automatikus nem lesz
- részekre bontást gyakoroltató játékok (lásd az 1. fejezetben)
- az átlépés bevezetése (lásd a 2–4. fejezetben)

3. A számok globális egységként, tömbként (nem csak egyesek halmazaként) való kezelése

Ezt a célt olyan folytonos szemléltetőeszközök használatával lehet a legkönnyebben elérni, mint a színes rudak. Az egyik nehézség a szorzás megértése során az „egy" és az „egy csoport" visszatérő keverése a diákok részéről. Ez talán abból a megszokásból ered, hogy a számokat hajlamosak egyesek csoportjának, halmazának tekinteni. Ezért erősíteni kell bennük a számokat önálló egységeknek, tömböknek tekintő globális szemléletmódot. Ahogyan a helyiértékek tanításakor könnyen megértik, hogy a tíz vagy a száz önálló, teljes egység, úgy a többi szám esetén is értessük meg velük, hogy azok összetartozó egyesek alkotta új, önálló egységek.

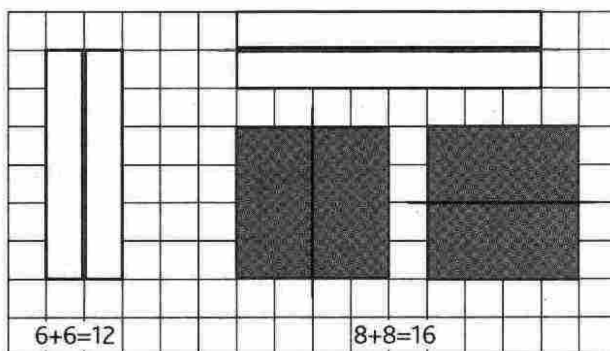
Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- gyakorlatok színes rudakkal,
- számok felépítése összetevőikből; például: 7=4+3,
- kis számok azonos méretű csoportokra bontása,
- számok bontását gyakoroltató játékok (lásd az 1. fejezetben).

4. Kétszerezés és felezés

A kétszerezés (duplázás) és a felezés önmagában is hasznos technika, ráadásul a szorzótábla egyes részeinek könnyebb megértéséhez és megtanulásához is hozzásegít. Fontos megtanítani, hogy a kétszerezés nemcsak összeadási eljárás (ahogyan azt sok gyerek hiszi, kizárólag a megoldás kiszámolását tartva szem előtt), hanem szorzási eljárás is. Egy tükör vagy egy ábrába berajzolt szimmetriatengely segítségével szemléltethetjük a megerősíteni kívánt gondolkodásmódot. Ennek hiányában sok diák azt hiszi, hogy a *kétszerezés* azt jelenti: *add hozzá önmagához*. Könnyű megállapítani, melyik gyerek él ebben a tévhitben: az, aki a *kétszerezd meg, majd kétszerezd meg újra* feladatban következetesen a kiinduló szám háromszorosát mondja eredményül (a négyszerese helyett).

Miközben a konkrét tárgyakkal végzett tevékenységet egyre inkább felváltja az ábrázolás, folyamatosan hangsúlyoznunk kell valamely szimmetriatengely meglétét. Például az 1 cm-es négyzetrácsos papíron satírozzunk be néhány négyzet alkotta téglalapot, ezután a téglalap egyik éle mentén húzzunk egy vastag (akár színes) vonalat, és tükrözzük arra.

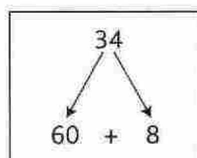


Jól láthatóan jelöljük meg a szimmetriatengelyt az 1 cm-es négyzetrácsos papíron, hogy hangsúlyozzuk: a kétszerezés egy szorzási eljárás.

Ha a diákok már biztosan tudják minden 1 és 10 közötti szám kétszerezését, mutassuk meg nekik,

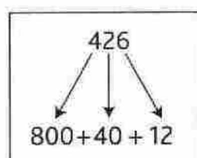
hogyan lehet nagyobb számokat megduplázni. Szétválasztjuk a számokat tízesekre és egyesekre, külön kétszerezünk mindegyik helyiértéken, majd a részösszegeket összeadjuk. Sok diák számára hasznos lehet a nyilakkal való jelölés (az ábrán balra) – hasznosabb, mint a hagyományos, műveleti jeleket alkalmazó leírás. Ez egy könnyen megjegyezhető és felidézhető jelölés, amely segíti a gyermeket a megértésben, és abban, hogy képes legyen fejben elvégezni a műveletet.

Példa: 34 kétszerezése



inkább, mint 34·2=(30·2)+(4·2)

Példa: 426 kétszerezése

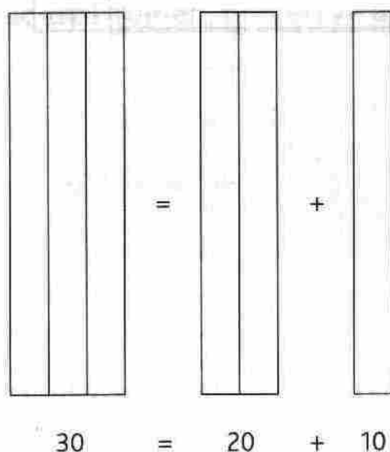


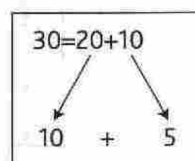
inkább, mint 426·2=(400·2)+(20·2)+(6·2)

A felezés jóval bonyolultabb, mint a kétszerezés; még akkor is, ha nem törtet eredményező (páratlan) számból indulunk ki. A fő nehézség az, hogy míg bármely jelölés esetén világos, hogy kétszerezésről van szó (26+26 vagy 26·2), addig a megfelelő felezés esetén a feladat esetleg kivonás formájában jelentkezik (52–26), amelyben semmi nem utal arra, hogy felezésre van szükség.

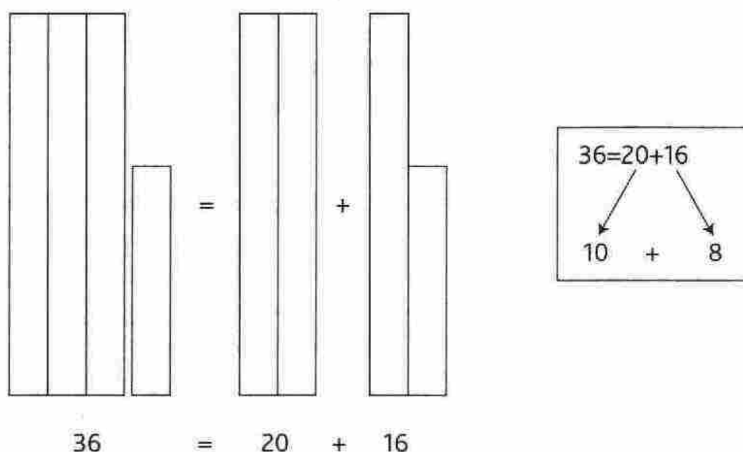
Még ha a diák fel is ismeri, hogy felezésre van szükség, további nehézséget jelenthet számára, ha páratlan számú tízes van a felezendő számban. Olyan szám felezésekor, mint például a 36, a diák külön-külön esetleg jól elboldogul mind a 30, mind a 6 felezésével, de elronthatja a két részösszeg összeadását. Mi a teendő? Szemléltetőeszközök használatával arra ösztönözzük, hogy a felezés előtt úgy bontsa fel a számot két összetevőre, hogy az egyik 10 és 20 közötti legyen. A 20 és a 16 felének megtalálása a 10+8 összeget eredményezi, amit könnyebb kiszámítani, mint a 15+3-at. Miután rudakkal megoldotta, a szemléletes nyilakkal is írja le a feladatot (lásd az ábrát).

Példa: 30 felezése





Példa: 36 felezése



Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- kettős piramis építése színes rudakból, 10+10-ig,
- tükör használata annak szemléltetésére, hogy a kétszerezés inkább a szorzáson alapul, mint az összeadáson,
- kerek számok (azaz a 10 többszöröseinek) felezése; különös tekintettel a páratlan számú tízest tartalmazókra,
- páratlan számú tízest tartalmazó kétjegyű számok bontása egy 10 és 20 közötti számra plusz a fennmaradó része,
- a kétszerezés és a felezés összekapcsolása,
- egy szám kétszerezése, majd az eredmény felezése.

5. Helyiértékes számírás, benne a tizedes törtekkel

A matematikai nehézségekkel küzdő diákok nehezen boldogulnak a helyiérték elvont fogalmával. Sokan nem látják át, hogy az oszlopoknak logikus, hármasával ismétlődő rendjük van: egyesek, tízesek, százasok az *egyesek* között, aztán egyesek, tízesek, százasok az *ezresek* között, aztán egyesek, tízesek, százasok a *milliósok* között és így tovább.

Hogy a tizedes törteket jelölő oszlopokra is kiterjesszük a megértést, mutassunk rá, hogy bármely oszlop értéke tízszerese a jobb oldali szomszédjának és tizede a bal oldalinak. A helyiérték-tartókba helyezett szemléltetőeszközökkel (színes rudakkal, a Dienes-készlet elemeivel) segíthetjük annak felismerését, hogy egyoszlopnyi oldalirányú lépés a számjegy értékét egy tízes faktorral változtatja meg (szorozza vagy osztja, iránytól függően). Ez különösen nagy gondot okoz a térbeli (és síkbeli) tájékozódási nehézséggel küzdők számára.

Ügyeljünk a tiszta kiejtésre, és ezt követeljük meg a diákoktól is, hogy mindenki pontosan hallja a különbséget a tízesek és tizedek, a százasok és századok között.* A tizedes helyiértékű oszlopokat inkább törtekkel jelöljük, ne kezdőbetűkkel. Jól láthatóan jelöljük – és jelöljék a gyerekek is – a tizedes vesszőt, kezdetben akár színessel.

	ezresek			egyesek			tizedesek		
	százasok	tízesek	egyesek	százasok	tízesek	egyesek	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	
						,			

* Ez a probléma a magyar nyelvben kevésbé jelentkezik. Az angolban sokkal inkább hasonlítanak a megnevezések (tens – tenths, hundreds – hundredths). (A ford. megjegyzése)

Az oszlopok elnevezésének hármasával való ismétlődése kevésbé jól felismerhető a tizedes vesszőtől jobbra. A Dienes-készlettel már megbarátkozott diákok azonban felismerik az ismétlődő mintát, ha az eszközök alakjára figyelnek: kocka, rúd, lap, kocka, rúd, lap stb.

egészek		tizedesek		
tíz 10	egy	tized 0,1	század 0,01	ezred 0,001

Javasolt módszerek, gyakorlatok (lásd még a 2. fejezet 7–8. előismeretéhez kapcsolódókat):[1]

- a helyiértékek és a pénz kapcsolata,*
- konkrét mennyiségek kirakása a helyiérték-tartókban,
- a 10-zel való szorzás és osztás tanítása a helyiérték-oszlopok közti eltolásként,
- ezt kiterjesztve a 100-zal és 1000-rel (stb.) való szorzás és osztás tanítása a szám helyiérték-oszlopok közti eltolásaként (És inkább így, mint a tizedes vessző áthelyezéseként. Én arra tanítom a diákjaimat, hogy a helyiértékek oszlopait, a tizedes vesszővel együtt, tekintsék mozdulatlan háttérnek, amely előtt a számok mozognak – éppen úgy, ahogyan a tartók „viselkednek" a velük végzett gyakorlatokban. A számok mintegy „lebegnek" ez előtt a háttér előtt, mintha egy átlátszó függönyre volnának felszerelve, amely a kívánt irányba mozog, amíg megfelelő számú oszlopnyit nem lépünk. Ez könnyen demonstrálható átlátszó fóliával.),
- tizedes számok elhelyezése a számegyenesen (A rajzokon ne mindig ugyanazt a méretarányt alkalmazzuk. Az ábrázolt szakasz – legyen bár azonos hosszúságú – egyszer jelölje a 0-tól 10-ig tartó intervallumot, másszor a 0-tól 50-ig, a 0-tól 100-ig vagy a –50-től 100-ig tartót stb.),
- egy vagy két tizedes jegyet tartalmazó számok (növekvő, illetve csökkenő) sorba rendezése,
- tizedes tört alakban felírt, azonos értékű, de eltérő számú tizedes jegyet tartalmazó számok összepárosítása,
- tizedes törtek egészekre való kerekítése.

6. Többjegyű számok felépítése és részekre bontása

Erről az előismeretről már szó esett a 2. fejezetben. Olyan szemléltetőeszközök használatát ajánlottam a nagy számok felépítéséhez és részekre bontásához, mint a színes rudak és a Dienes-készlet. A többjegyű számokat általában helyiértékek szerint bontjuk részekre – például a szorzás megkönnyítése érdekében –, de nem mindig ez a legjobb bontási mód. (Erről bővebben lásd a 6. fejezet 11. és 13. gyakorlatát, illetve a 7. fejezet 5. gyakorlatát.)

Javasolt módszerek, gyakorlatok:

- számok tízesekre és egyesekre bontása különböző módokon, szemléltetőeszközök használatával az írásbeli (ábrával vagy számjegyekkel történő) rögzítés előtt (például: 56=50+6=40+16=30+26=20+36=10+46),

* Mivel a magyar pénzrendszerből jelenleg hiányzik a váltópénz (a fillér), továbbá az 1 és 2 forintos is, nálunk ez a módszer jelenleg csak korlátozottan használható. Meg kell várnunk az euró bevezetését. (A ford. megjegyzése)

- számok bontása úgy, hogy az egyik összetevő 10 és 20 között legyen (például: 56=16+40 vagy 88=70+18, először színes rudakkal kirakva),
- számok bontása tízesekre és egyesekre (például: 29=20+9), majd a 10 és az 1 többszöröseinek összegére (29=2·10+9·1), először szemléltetőeszközökkel modellezve.

7. A szorzótábla, avagy hogyan vezessük le az egészet néhány csomópontból

Sok diszlexiás és diszkalkuliás tanuló egyszerűen képtelen megtanulni a szorzótáblát, hiába próbálkozik vele. Éppen e hiányosság alapján lehet felismerni a problémakört. Az ilyen diákoknak azzal segíthetünk a legtöbbet, ha megmutatjuk nekik, hogyan jöhetnek rá egy ismeretlen szorzás eredményére a már tudott, ismert eredményekből következtetve. Ha nem maga a szorzás és az osztás áll a gyakorlás középpontjában, nyugodtan adjunk a kezükbe egy írott szorzótáblát, hogy arról olvassák le az eredményt.

Mint alapvető minimumot, annyit azért minden diáknak tudnia kell, hogyan szorzunk egy számot 2-vel, 10-zel – illetve ezek alapján 5-tel. Ezekből az úgynevezett „csomópontokból" kiindulva le lehet vezetni bármely más számmal való szorzást, lépésenként történő előre- vagy visszafelé számlálással.[2] A módszer bármely számmal való szorzás esetén működik.

Ez az „általános stratégia" azonban gyakran nehézkes, túl sok lépésből áll, és nem teszi lehetővé a felcserélhetőség használatát (például: a 4·8-at tekintsük 8·4-nek). Én magam a szorzást és az osztást ezért inkább területi modellként tanítom a diákoknak, már a kezdetektől. Ez a módszer is a fejből tudandó adatok és eljárások redukálására törekszik. Egyúttal a logika használatára és következtetések levonására ösztönzi a diákokat: akár kevés ismert tényből is képesek legyenek újabbak levezetésére (lásd a 6. fejezetet).

A területi modell egyik nagy előnye, hogy rávilágít a szorzás felcserélhető (kommutatív) voltára. Ez lehetővé teszi egyszerűbb számítási módok, úgynevezett „lerövidítések" korai bevezetését, amelyekkel csökkenthető a számítási lépések száma. A 2-es szorzótábla eredményeit például sokkal gyorsabban megkapjuk kettőzéssel, mint kettesével való számlálással; a 4-es szorzótábla eredményeit a kettőzés kettőzésével; az 5-szörös szorzatot a 10-szeres szorzat feleként; a 9-szerest a 10-szeresből egyszer kivonva a számot. Mindezek a „lerövidítések" személyes felfedezéseken, szemléltetőeszközökkel való kísérletezésen alapuljanak, hogy a diákok pontosan értsék, mit jelent a szorzás, a többszörözés, és mit tartalmaz a szorzótábla.* (További részletek a 6. fejezetben.)

Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- adott számmal való, egy-két lépéses számlálás előrefelé,
- a szorzótábla kirakása színes rudakkal 10 cm oldalú négyzetben,
- a szorzótábla megjelenítése satírozással 10×10-es négyzetben,
- egy szám 9-szerese mint a 10-szereséből visszafelé tett lépés (felhasználva a 10 bontásait, hogy csökkentsük a számítás hosszát),
- a kétszerezés és felezés mint lerövidítési eljárás (szorzás 4-gyel mint a kétszerezés kétszerezése; szorzás 8-cal mint egy újabb kétszerezés az előzőhöz képest; szorzás 5-tel mint a 10-zel való szorzás eredményének felezése),
- játékok önkorrekciós kártyákkal a szorzótábla megtanulására és gyakorlására,
- „Osztók" (a játékot lásd a *Mellékletben*),
- „Többszörösök" (a játékot lásd a *Mellékletben*).

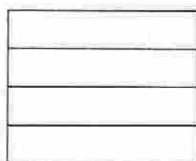
* Létezik olyan szakmai tapasztalat is, amely szerint a lerövidítéseket inkább az okosabb gyerekek tudják használni, nem a lemaradók és a nehézséggel küzdők. (A ford. megjegyzése)

8. A szorzás lényegének, a szorzás és az osztás közti alapvető kapcsolatnak a megértése

Hogy megbizonyosodjunk afelől, diákjaink valójában mit értenek szorzáson, rakassuk ki velük számolókorongokkal vagy kavicsokkal, hogyan is „néz ki" négy darab ötös (vagyis 5-ször 4*). Az a diák, aki nem igazán érti, mit jelent a többszörözés, jellemző módon 9 elemet rak ki, és két (egy négyes és egy ötös) csoportra osztja őket.

A megértés tesztelésének másik módja, ha a színes rudak közül felveszünk – mondjuk – három egyformát, például (a 8-ast jelző) bordót, és azt mondjuk: *Három nyolcas van a kezemben. Szeretném, ha négy lenne. Mennyit kell ehhez hozzáadnom?* Akinek hiányos a tudása, azt mondja: *Még egyet!*, és esetleg oda is nyújt egy (1 egységnyi értékű) fehér kockát. Az a diák, aki érti, hogy a szorzás ugyanakkora mennyiségek ismételt összeadása, azt feleli: *Még egy nyolcast!* Az elvi megértés sokkal fontosabb, mint hogy jó választ kapjunk a 8·3 vagy a 8·4 kérdésre.

Az első pillanattól kezdve nagyon fontos a szorzás és az osztás közti kapcsolat hangsúlyozása. Számolókorongokkal, kavicsokkal és színes rudakkal (vagyis diszkrét és folytonos szemléltetőeszközökkel) egyaránt megtehetjük, hogy téglalap alakba rendezzük őket: ezzel máris megjelenítettük a területi modellt. A diákoknak meg kell érteniük, hogy a szorzás és az osztás nem más, mint ugyanannak a kapcsolatnak más nézőpontokból való megközelítése. Például négy darab (5-ös értékű) sárga rúdból összerakott téglalap esetén ugyanolyan kézenfekvő és logikus azt mondani, hogy a *20-at felbontjuk 4 darab 5-ösre*, mint azt, hogy *5-ször 4 az 20.*



Az így elrendezett rudakról azt is mondhatjuk, hogy a 20-at felbontjuk 4 darab 5-ösre (ekkor osztásról beszélünk), és azt is, hogy 5-ször 4 az 20 (ekkor szorzásról beszélünk).

Javasolt módszerek, gyakorlatok:[1]

- építsünk fel kis számokat egy sorban elrendezett, azonos méretű csoportokból,
- korongokat vagy rudakat rendezzünk téglalap alakba, hogy rámutassunk, a szorzás kommutatív,
- téglalap alakba rendezett elemekből olvassunk ki szorzást és osztást is,
- készítsünk egyszerű ábrákat összetartozó szorzásokat és osztásokat tartalmazó szöveges feladatokhoz,
- használjuk a szorzótábla említett lerövidítéseinek fordítottját osztásnál (például ha a 4-gyel való szorzás eredményét a kétszeres kétszereseként kaptuk meg, a 4-gyel való osztást a felezés felezéseként hajtsuk végre),
- „Többszörösök" (a játékot lásd a *Mellékletben*),
- „Osztók" (a játékot lásd a *Mellékletben*).

Hivatkozások

1 A javasolt módszerekről, gyakorlatokról részletesebben: R. Bird (2007) *The Dyscalculia Toolkit*, Sage.

2 Dorian Yeo „általános stratégiának" nevezi: D. Yeo (2003) *Dyslexia, Dyspraxia & Mathematics*, pp. 35–263, Whurr.

* Az itthoni didaktika szerint a „négyszer öt" a 4-nek 5-tel való szorzását, azaz négy elem megötszörözését jelentené (mivel a szorzásban elöl álló tényező a *szorzandó*, a hátsó a *szorzó*). E tekintetben a magyar nyelv szerkezete jelent némi hátrányt az angolhoz képest, hiszen logikusabb, funkcionálisabb lenne az „öt négyszer" megnevezés. Mivel a szorzás amúgy is kommutatív, és a tárgyalt módszer ezt ki is használja, ez az árnyalatnyi különbség voltaképpen nem zavaró. (A ford. megjegyzése)

6. FEJEZET

A szorzás és az osztás területi modellje

Áttekintés

Ahhoz, hogy a diák felső tagozaton (és majd a középiskolában) az elvárt szinten tudja alkalmazni a szorzást és az osztást, előbb meg kell értenie e műveletek lényegét és a köztük fennálló kapcsolatot. Ez a fejezet erre összpontosít. Ahhoz azonban, hogy a diákok valóban hasznosíthassák az itt leírtakat, legalább az előző fejezetben tárgyalt első hat előismeretnek birtokában kell lenniük.

Sajnálatos módon a matematikakönyvek többsége feltételezi, hogy a diákok ismerik és alkalmazni is tudják a szorzótáblát – ezért nem részletezik, hogyan kell elsajátítani ezt a tudást. Azoknak a diákoknak, akik alsó tagozaton nem tanulták meg a szorzótáblát, külön meg kell tanítani a számtalan memorizált, fejből tudandó adat ismeretétől független következtetési eljárásokat.

Ez a fejezet – a területi modell alkalmazásával – lépésről lépésre haladva segíti a matematikai nehézséggel küzdőket a szorzás és az osztás fogalmának megértésében. Ebben a megközelítésben a két műveletet együtt tanítjuk, mint egyazon összefüggés két nézőpontját.

A területi modell megszabadítja a tanárt és a diákot attól a téves elképzeléstől, hogy az osztás ismételt kivonás.* Ez a módszer mindkét művelet esetében mennyiségek ismétlődő csoportokból való felépítéséből indul ki – szorzás esetén a végső mennyiségre, osztás esetén a csoportokra fókuszálva. Az egyetlen különbség a két művelet között, hogy hol jelenik meg az eredmény: a szorzás esetén adott számú, adott méretű csoportokból építkezünk, és e csoportok összértéke jelenti az eredményt; az osztás esetén e csoportok alkotják az adott osztandót, és a csoportok száma vagy az egyes csoportok mérete jelenti az eredményt.

A területi modell bármely felsőbb évfolyamon, bármely felhasználási területen alkalmazható, ahol szorzásra vagy osztásra van szükség. Különösen jól használható az algebrában, például a zárójelek felbontásánál (lásd a 9. fejezetben). Világossá teszi a szorzás kommutatív voltát éppúgy, mint az összes fontos kapcsolatot a szorzás és az osztás között. Segíti a diákokat annak felismerésében, hogy a kétszerezés és a felezés jól alkalmazható más eljárások lerövidítésére. Ráadásul rendkívül látványos, könnyen megjegyezhető és elsajátítható, így fejleszti az absztrakt gondolkodást.

A területi modell további előnye, hogy a téglalapos elrendezés egyszerre képes megjeleníteni az osztás két fő értelmezését: a (részekre) osztást és a bennfoglalást (vagy csoportosítást). Fontos, hogy a diák megértse a kettő közti különbséget (lásd lejjebb a 12. gyakorlatot). Így elkerülhetők azok a csapdák, amelyekbe a matematikai nehézséggel küzdők az osztás kapcsán rendre beleesnek.

A területi modell elősegíti új ismeretek levezetését a már meglévőkből.

Ez a fejezet 15 gyakorlatot tartalmaz. Mindegyik azt célozza, hogy a diák a végrehajtás konkrét szintjéről eljusson a megértés absztrakt szintjére, hogy a szorzás és az osztás hosszas írott eljárásai mögött meglássa magát a matematikát.

* A magyar tantervekben és tanítási gyakorlatban nincs ilyesmi. (A ford. megjegyzése)

A szorzás és az osztás megértését szolgáló gyakorlatok

1. gyakorlat:	A szorzás mint azonos méretű csoportok ismételt összeadása, különálló elemek téglalap formába rendezésével.
2. gyakorlat:	A szorzás mint ismételt összeadás, színes rudak téglalap formába rendezésével.
3. gyakorlat:	Adott végeredményt megjelenítő téglalap felépítése színes rudakból.
4. gyakorlat:	Szorzás és osztás kiolvasása színes rudakból felépített téglalapokból.
5. gyakorlat:	A 10×10-es négyzetrácsba írt szorzótábla konkrét vizsgálata.
6. gyakorlat:	Osztási feladatok átfogalmazása érthetőbbre.
7. gyakorlat:	Egyszerű szöveges feladatok alkotása színes rudakból kirakott téglalapokhoz, a kérdés szorzásról osztásra és visszafelé való átfogalmazásának gyakorlása.
8. gyakorlat:	Osztók és prímszámok konkrét vizsgálata.
9. gyakorlat:	Fokozatos fejlődés az ábrázolás szintjére (szorzást és osztást jelentő téglalapokat rajzolva).
10. gyakorlat:	A szorzótábla megjelenítése a számegyenesen.
11. gyakorlat:	Téglalap-vázlatok szorzótáblabeli következtetésekhez.
12. gyakorlat:	Szemléltetőeszközök, téglalap alakú elrendezések, ábrák az osztás és bennfoglalás közti kapcsolat megvilágításához.
13. gyakorlat:	Téglalapos ábrák szorzótáblabeli lerövidítésekhez.
14. gyakorlat:	Különböző típusú szöveges feladatok, változó megfogalmazásban és kérdésfeltevéssel.
15. gyakorlat:	Az osztási maradék.

A szorzás és az osztás területi modellje

Az első gyakorlat előtt

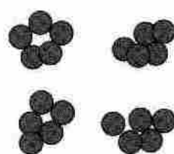
Bizonyosodjunk meg róla, hogy a diákok rendelkeznek a szükséges előismeretekkel (lásd az 5. fejezetet).

1. gyakorlat

A szorzás mint azonos méretű csoportok ismételt összeadása, különálló elemek téglalap formába rendezésével.

Fogjunk húsz elemet (számolókorongot, kavicsot stb.), és rendezzük el téglalap formában. Mutassunk rá, hogy ugyanazt az elrendezést tekinthetjük négy darab ötösnek vagy öt darab négyesnek (azaz 5·4-nek vagy 4·5-nek).

Ezt ismételjük meg más, különböző számokkal is, a kisebbek felől indulva.



Négy csoport ötös.

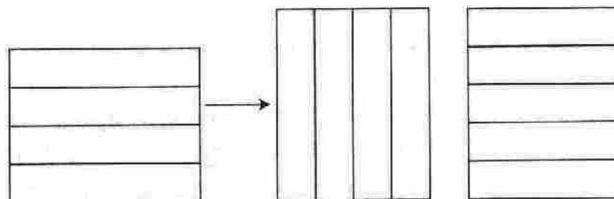


Téglalap alakú elrendezés, amely egyszerre mutatja a 4·5-öt és az 5·4-et.

2. gyakorlat

A szorzás mint ismételt összeadás, színes rudak téglalap formába rendezésével.

Fogjunk öt (4-es értékű) piros és négy (5-ös értékű) sárga rudat. Rendezzük őket téglalap formába, rámutatva, hogy öt négyes és négy ötös ugyanakkora területet fed le, ugyanannyit ér. Ha az egyiket 90°-kal elforgatjuk, pontosan fedik egymást.



A négy darab ötös rúdból felépített téglalap elforgatva pontosan fedi az öt darab négyes rúdból felépítettet.

Ismételjük meg az eljárást más szorzókkal is; például négy hármassal és három négyessel, három hatossal és hat hármassal, hét nyolcassal és nyolc hetessel.

Ezen a szinten még ne kérdezzük a művelet eredményét.

3. gyakorlat

Adott végeredményt megjelenítő téglalap felépítése színes rudakból.

Ez a gyakorlat logikusan következik az előzőből. A diákoknak egy adott számot kell felépíteniük, azaz egy adott területű téglalapot kell kirakniuk egyforma színes rudakból. Valójában egy osztási feladatról van szó, anélkül, hogy az „osztás" kifejezés maga előkerülne. Például, a diákok építsenek fel egy 20 egységnyi területű téglalapot 4-es értékű rudakból, vagy egy 30-ast 6-osokból. Ennek a gyakorlatnak a lényege, hogy megmutatja: az osztás során – csakúgy, mint a szorzás során – egyforma méretű csoportokból *építünk fel* egy mennyiséget. Az ismételt összeadás fogalmát sokkal könnyebb megérteni és alkalmazni, mint az ismételt kivonásét.

4. gyakorlat

Szorzás és osztás kiolvasása színes rudakból felépített téglalapokból.[1]

Egy téglalap oldalainak megadásakor – megállapodás szerint – előbb a vízszintes, majd a függőleges oldalhosszt nevezzük meg.* Ha téglalapot készülünk felépíteni, a rudakat kézenfekvő vízszintesen egymásra rakni. A színes téglalappal egyúttal a megfelelő szorzótáblát is elkészítettük. Az öt darab lila rúdból felépített téglalapot például tekinthetjük öt hatosnak, vagyis hatszor ötnek, lejegyezve 6·5-nek. Szoktassuk rá a diákokat, hogy megfelelő sorrendben sorolják fel a téglalap oldalait, amikor megnevezik a szóban forgó számokat. A 6·5 szorzás eredményét hatosával, nem pedig egyesével számlálva kapjuk meg – vagy a szorzótábla megfelelő csomópontjából kiindulva (lásd 5. fejezet, 7. előismeret). Ebben az esetben a 6·5-öt a 6·10, azaz 60 „csomóponti" szorzatból vezetjük le. Ez annak a fele, vagyis 30. Ezután készítsünk egy ugyanekkora téglalapot hat darab (5-ös értékű) sárga rúdból, és olvassuk le róla, hogy 5·6 is egyenlő 30-cal.

Ezután gyakoroltassuk a diákokkal, hogy a fenti két téglalapból osztást olvassanak ki: 30:6=5 és 30:5=6. Ragaszkodjunk hozzá, hogy megfelelő sorrendben nevezzék meg a számokat, a téglalap oldalaiból kiindulva.

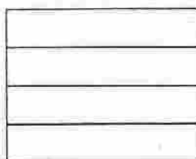
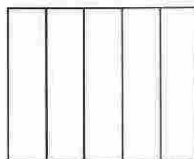
Ismételgessük ezt a gyakorlatot sokféle számpárral, sokféle téglalappal, amíg csak szükséges – addig, amíg a diákok képesek nem lesznek fejben is felismerni, végrehajtani a tényezők felcserélését bármely terület esetén anélkül, hogy a második téglalapot ténylegesen felépítenék. Például, ha a négy fekete rúdból alkotott téglalapból kiolvasták, hogy 7·4=28, képesnek kell lenniük a 90°-kal elforgatott téglalapból kiolvasni a 4·7-et, és elképzelni, hogy hét darab piros rúd ugyanilyen téglalapot alkot. Az eredeti téglalapból ki kell tudniuk olvasni, hogy 28:7=4, az elforgatottból pedig, hogy 28:4=7.

(Folytatódik)

* Az angol szövegben éppen fordítva, de a magyar didaktikához ez illeszkedik. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

Azoknak, akik megértették a szorzás kommutatív voltát, nincs szükségük a téglalap 90°-os elforgatására. Az elforgatás mégis hasznos lehet, két okból: egyrészt a bevett (a téglalap oldalainak megnevezési sorrendjére vonatkozó) megállapodás megjegyzése, másrészt a modell és a későbbi írásbeli lejegyzés közti kapcsolat miatt (lásd a 8. fejezetben).

A téglalapos elrendezések, különálló elemekből vagy színes rudakból felépítve, egyszerre jelentenek szorzást és osztást. Mindegyik fenti példából kiolvashatjuk, hogy 5·4=20, 20=5·4, 4·5=20, 20=4·5, 20:5=4, 20:4=5.

5. gyakorlat

A 10×10-es négyzetrácsba írt szorzótábla konkrét vizsgálata.

Azoknak a diákoknak, akik nem tudják megtanulni a szorzótáblát, segítséget jelenthet az itt bemutatott „szorzórács" használata. A matematikai nehézségekkel küzdő diákok nyugodtan használhatják – persze csak akkor, ha nem maga a szorzótábla a tananyag. Mindenekelőtt azonban meg kell érteniük, hogyan működik ez a meglehetősen absztrakt szemléltetőeszköz.

Egy 1 cm oldalú, üres négyzetekből álló rács tíz oszlopát és tíz sorát számozzuk meg 1-től 10-ig. A diákok helyezzék a rács bal felső sarkába az előző gyakorlat során használt téglalapok valamelyikét, például a négy darab ötösből felépítettet. Kartonpapírból vágjunk ki egy L formát (mindkét szára legyen legalább 10 cm hosszú és kb. 2 cm széles; lásd az ábrát). Ezt illesszük a téglalap jobb alsó sarkához, így elválasztva a téglalapot a rács többi részétől. A diákok olvassák ki a téglalapból a megfelelő szorzást, és vegyék észre, hogy az L alakú karton a széleken feltüntetett számoknál pontosan kijelöli a téglalapok megfelelő oldalait, azaz a szorzás tényezőit (esetünkben az 5·4-et). Az eredményt a diákok az általuk választott módszerrel határozzák meg: ötösével számolva négy lépésben, vagy a 10·4 felezésével. Ezután az L alakot a helyén hagyva távolítsák el a rudakból álló téglalapot. Észre fogják venni, hogy a karton pontosan húsz négyzetet különített el a rács többi részétől. Írják be a 20-as számot az L alak sarkánál lévő négyzetbe; ez a négyzet a rács ötödik oszlopának és negyedik sorának a metszete, egyúttal az elkülönített téglalap huszadik négyzete, ha azokat balról jobbra és fentről lefelé számoljuk. A diákok ezután ismételjék meg az eljárást a 90°-kal elforgatott téglalappal, és írják be a 20-as szorzatot a negyedik oszlop és az ötödik sor metszetében lévő négyzetbe.

(Folytatás)

·	1	2	3	4	5			8	9	10
1										
2										
3										
4										
7										
8										
9										
10										

·	1	2	3	4	5			8	9	10
1										
2										
3										
4					20					
7										
8										
9										
10										

·	1	2	3	4			7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5				20						
8										
9										
10										

Valószínűleg nem fogjuk tudni kitölteni az összes négyzetet, mert a rács túl kicsi ahhoz, hogy 100 olvasható számot elhelyezzünk benne. A diákok oldjanak meg a szorzórács segítségével néhány további szorzást, megtalálva mindkét helyet a rácsban, ahol a felcserélhetőség miatt ugyanaz a szám áll. Vegyék észre, hogy bizonyos szorzatok – a négyzetszámok – csak egyszer, az átlóban szerepelnek (kivéve, ha másként is szorzattá alakíthatók). Ezeket 1-től 100-ig írják be a rács megfelelő helyére a téglalapok és az L alakú karton segítségével.

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1			4						
2		4								20
3			9			18			27	
4	4			16	20					
5				20	25				45	
6			18			36				
7										70
8									72	
9			27		45			72		
10		20					70			

6. gyakorlat

Osztási feladatok átfogalmazása érthetőbbre.

Térjünk vissza a 3. és 4. gyakorlatban már vizsgált feladatokhoz, és néhányat közülük adjunk fel ismét, (bennfoglaló) osztásként megfogalmazva. Használjuk a precíz matematikai megfogalmazásokat („...-ben a ...") és jeleket („:"). Tanítsuk meg a diákokat a *Hányszor van meg X-ben az Y? (X:Y=?)* kérdés átfogalmazására *Y-szor mennyi az X?* formára. Ugyanis ez a megfogalmazás van közvetlen kapcsolatban a szorzótáblával. Például a 32:8 osztást a diákok fogalmazzák át *8-szor mennyi az 32?* formára. A kérdést megválaszolhatják konkrétan 8-asokból (például színes rudakból) építkezve egészen a 32 eléréséig, vagy fejben, absztrakt módon végiggondolva, hogy a 8-as szorzótábla melyik sora ad eredményül 32-t.

A 32:8 műveletet felfoghatjuk úgy, mint a 32 felépítését 8-asokból, azaz egy téglalap felépítését bordó rudakból, amíg az összérték (a téglalap területe) 32 nem lesz. A kérdést át lehet fogalmazni így: *8-szor mennyi az 32?*

Ha a feladat 32:4, az átfogalmazás ez lesz: *4-szer mennyi az 32?* Így a diákok a megfelelő szorzótáblabeli eredményhez tudják kötni a kérdést. Ha már (nemcsak bennfoglaló, hanem részekre) osztást is tudnak végezni, és ismerik a lerövidítéseket, akkor átfogalmazható így is a kérdés: *Mennyi 32 negyede?* (A lerövidítésekről bővebben lásd a 12. gyakorlatot.)

7. gyakorlat

Egyszerű szöveges feladatok alkotása színes rudakból kirakott téglalapokhoz, a kérdés szorzásról osztásra és visszafelé való átfogalmazásának gyakorlása.

Hasznos lehet, ha a diákok előbb maguk fogalmaznak meg szöveges feladatokat, mielőtt mások által megfogalmazottakat kellene megoldaniuk. A színes rudakkal végzett gyakorlatok során célszerű az egyes rudaknak valamilyen konkrét jelentést, nevet adni. Például a (4-es értékű) piros rúd jelentse egy autó négy kerekét, négy szendvicset egy csomagban vagy valaminek az árát stb. Ehhez a jelentéshez a gyerekek kerekítsenek történetet, amelyben egy szorzás és két osztás szerepel. Például jelentsen a piros rúd négy rózsát egy csokorban. Ekkor a 4·6-os téglalapról a következő feladatok fogalmazhatók meg: *Ha veszel hat csokor rózsát, csokronként négy virággal, összesen hány szál rózsát vettél? Ha anya 24 szál rózsát tesz vázákba úgy, hogy minden vázába 4 szál jut, hány vázára van szükség? Ha 24 szál rózsából 6 egyforma méretű csokrot kötünk, hány rózsa kerül egy csokorba?*

Ez sok diák számára meglepően nehéz feladat, még akkor is, ha kis számokkal és a szorzótábla már jól ismert részével dolgozunk. A gyakorlathoz mintafeladatlap található a *Mellékletben*.

8. gyakorlat

Osztók és prímszámok konkrét vizsgálata.

A diákok rendezzenek el külön elemekből álló szemléltetőeszközöket (korongokat, kavicsokat) annyiféleképpen (fekvő) téglalap alakzatba, ahányféleképpen csak lehetséges. Például a 12-es szám esetén három különböző alak lehetséges: 12·1, 6·2 és 4·3. A téglalapok oldalainak hosszára az „osztó" szót használjuk. Például: *A harmadik téglalap azt mutatja, hogy a 3 osztója 12-nek, és a 4 is osztója 12-nek. A második téglalap azt mutatja, hogy a 2 és a 6 is osztója 12-nek.*



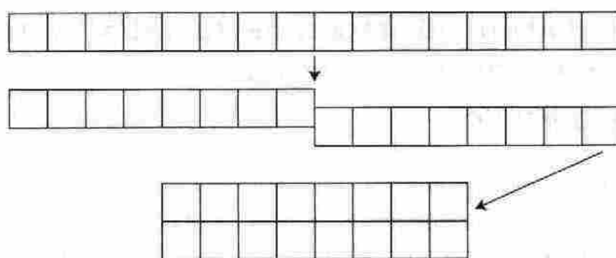
A téglalapos elrendezések azt mutatják, hogy a 12 osztói: 12 és 1, 6 és 2, 4 és 3.

Ismételjük meg a feladatot más, a szorzótábláról már ismerős számokkal; például: 9, 18, 21 vagy 24. Ezután a diákok vizsgáljanak meg olyan kis prímszámokat, mint 5, 7, 11 vagy 13. Azt fogják tapasztalni, hogy ennyi korongot nem lehet másként elrendezni, csak egysoros vonalban. Ez a feladat megérteti a diákokkal a prímszámok fogalmát.



Prímszámnyi korong csak egy vonalban helyezhető el, azaz csak „önmaga·1" szorzattá alakítható át.

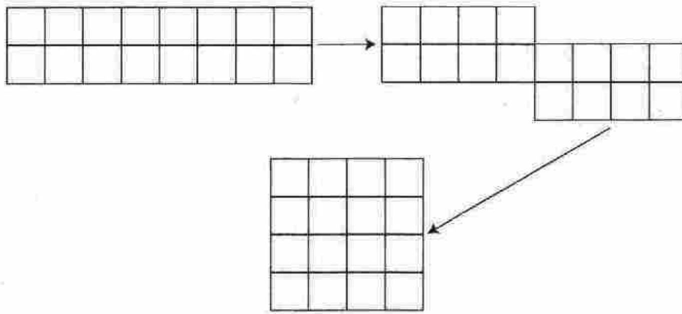
A feladat kiterjeszthető. Rakjunk ki kockákból (dobókockákból, a színes rudak fehér egységeiből) változó méretű téglalapokat, például 16 kockát rakjunk egy sorba (16·1). Mivel a 16 páros szám, e hosszú, vékony téglalap egyik felét egy tömbben át tudjuk tenni a másik fele alá. Az így kapott új téglalap fele olyan széles, de kétszer olyan magas lesz, mint az eredeti. Az új téglalappal megismételhetjük az előző eljárást, mivel a 8 is páros szám. Ezt az átalakítást újra és újra elvégezhetjük, amíg egy hosszú, vékony, álló oszlopot nem kapunk (1·16), amelyik ugyanakkora, mint a kiindulási téglalap, csak elforgatva. A szorzás kommutatív tulajdonságát a kezdő és a végső téglalap eltérő irányítottsága, de azonos mérete jelzi a diákok számára.



16 egységet először egy sorban (16·1-es téglalapként) helyezünk el.
A sor felét elmozgatva egy új, 8·2-es téglalapot kapunk.

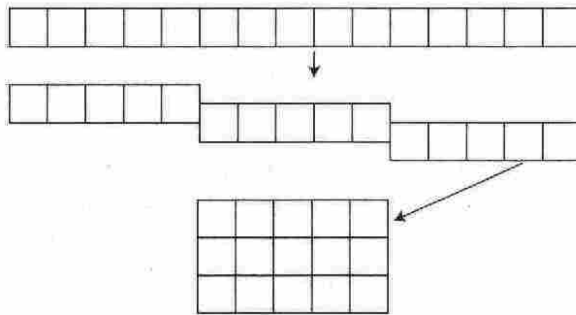
(Folytatódik)

(Folytatás)



Egy újabb felezési lépés után 4·4-es téglalapunk lesz.
Még kétszer megismételve a felezést, eljutunk a 2·8-as és az 1·16-os téglalaphoz.

Ha egy téglalap vízszintes oldala páratlan szám(ú kockából áll), ezt három, öt vagy hét (esetleg még több) egyenlő részre osztva, és e részeket egymás alá helyezve hozhatunk létre új téglalapot. Például a 9 vagy 15 kockából álló egyes sort három egyenlő részre bonthatjuk. A téglalapok ilyen átalakításának lehetősége csak akkor ér véget, ha a vízszintes oldal egy prímszám. Például, ha a 15 kockát a 15·1-es téglalapból átrendeztük 5·3-assá, további átalakítási lehetőség már nincs. Ez azt mutatja, hogy a 15-nek egyetlen osztópárja van: a 3 és 5 (persze az 1 és 15 párosán kívül).*



15 egységet először egy sorban (15·1-es téglalapként) helyezünk el.
Ezt elharmadolva új téglalapot kapunk: 5·3-asat.
Más elrendezés nem lehetséges, ezért a 15 összes osztója (sorban): 1, 3, 5, 15.

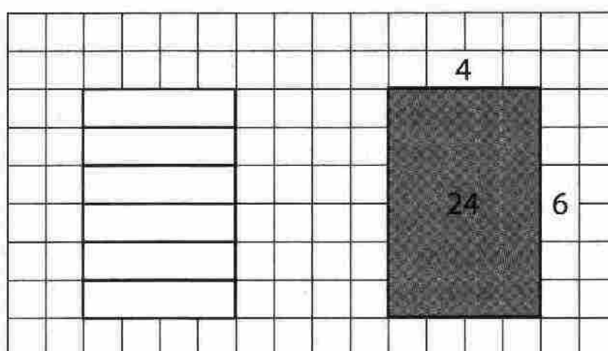
Ha nagyobb számokkal végezzük a feladatot, a túl sok korong vagy fehér kocka helyett érdemes 1 cm-es rácsozású papírból kivágott téglalapokkal dolgozni. (A kiterjesztés el is halasztható a 9. gyakorlat utánra.) Például a 60 osztóit keresve ki lehet indulni egy 10·6-os téglalapból, majd ennek szétvágása és másként való összeragasztása révén kereshetünk új téglalapokat. Hat különböző megoldást találunk (60·1, 30·2, 20·3, 15·4, 12·5, 10·6). A 23-as számot vizsgálva a 23·1-es csíkból induljunk ki. A diákok próbálgatás és hibázás – vagy logikus gondolkodás – útján rá fognak jönni, hogy nem készíthető belőle másmilyen alakú téglalap, a 23 tehát prímszám.

* Az 1 és a szám önmaga mindig létező osztópár, ezért hívjuk a többit *valódi* osztóknak. (A ford. megjegyzése)

9. gyakorlat

Fokozatos fejlődés az ábrázolás szintjére (szorzást és osztást jelentő téglalapokat rajzolva).

1 cm-es négyzetrácsozású papíron dolgozzunk. A diákok rakják ki rajta újra a 3., 4., 5. és 8. gyakorlat során színes rudakból már felépített téglalapokat. Rajzoljanak körbe néhány ilyen téglalapot, és a rudak levétele után satírozzák be a területet. Írják rá, melyik oldala mekkora, és mekkora a területe. Gyakorolják, hogyan lehet a megjelölt téglalapból szorzást és osztást is kiolvasni, a 4. gyakorlathoz hasonlóan (ott a színes rudak téglalapjaiból indultunk ki).



Balra: színes rudakból kirakott téglalap az 1 cm-es négyzetrácson.
Jobbra: ugyanaz a terület besatírozva és feliratozva a papíron.

A szorzás téglalapos megjelenítésének konkrét szintjétől más módon is elindulhatunk az elvont szint felé. A diákok ragasszanak a rács négyzeteibe kis kerek, 1 cm-es matricákat. Legyen a feladat például matricák ragasztása egy 4·5-ös téglalap négyzeteibe, de előbb mondják meg, hány matricát kérnek. Vagy adjunk át 18 matricát, és előbb becsüljék meg, majd számítsák ki fejben, hány sort töltenek meg, ha soronként hármasával egymás alá ragasztják őket. Ehhez előbb el kell képzelniük a téglalapot. Egy téglalap kirakásához mindig azonos színű matricákat használjunk.

Elegendő gyakorlás után a diákok képesek lesznek egy vázlatos téglalap segítségével – négyzetrács és skála nélkül – szorzást és osztást végezni fejben (lásd még a 11–14. gyakorlatokat).

10. gyakorlat

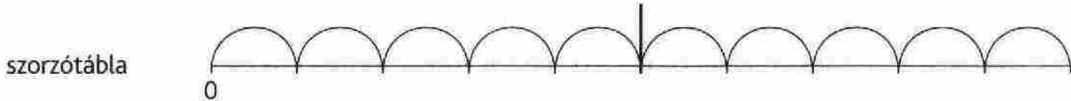
A szorzótábla megjelenítése a számegyenesen.

Ahhoz, hogy a már ismertekből újabb és újabb szorzótáblákat vezessünk le, a diáknak képesnek kell lennie adott lépésközökkel fejben számlálni. A 6-os, 7-es és 8-as szorzótáblában gyakran van szükség tízes átlépésre, amely sok diák számára nehézséget okoz. Akinek gondot jelent egy üres számegyenes elképzelése, annak segíthet, ha az említett három szorzótáblánál előforduló átlépéseket konkrétan szemléltetjük papíron, alkalmas számegyenesekkel.

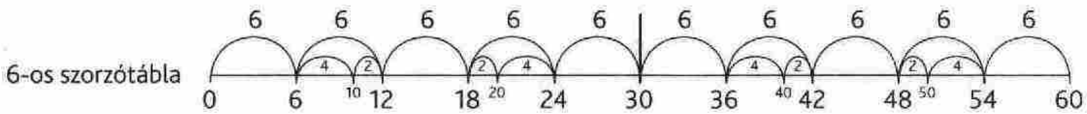
(Folytatódik)

(Folytatás)

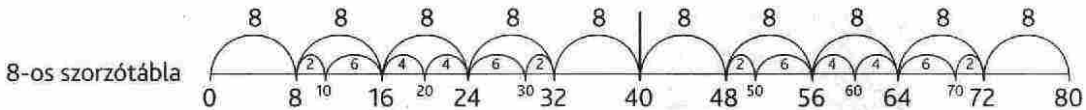
Az ábrán egy üres, a szorzótábla gyakorlására alkalmas számegyenes látható (megtalálható a *Mellékletben* is). Ezen tíz egyforma méretű ugrás van bejelölve, az ugrások kezdőpontja a nulla, és külön vonal jelzi az ábrázolt tartomány felezőpontját.

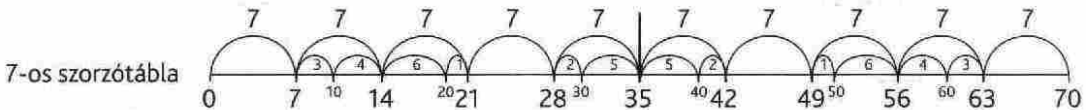


A diákok a 6-os szorzótábla esetében jelöljenek minden ugrást egy 6-ossal. Amint elkezdenek hatosával számolni, és az ugrások végpontjait a számegyenesen feliratozni, hamar kiderül, hogy a tíz ugrásból csak négyben van szükség tízes átlépésre, és ezek is a felezőpontra szimmetrikus helyen vannak. Ráadásul a 6-ot mind a négy esetben 4+2 vagy 2+4 módon kell felbontani az átlépéshez.



Ugyanezt az eljárást ismételjük meg előbb a 8-as, majd a nehezebb 7-es szorzótáblával. A 8-as tábla vizsgálata során kiderül, hogy lényegében csak kétféle bontás fordul elő, nevezetesen a 4+4 és a 2+6 (vagy 6+2). A 7-es táblában sajnos a 7 mindhárom lehetséges bontása előkerül különböző helyeken – éppen ez teszi a 7-es szorzótáblát olyan nehézzé.





A bontások felezőpontra való szimmetriája azonban ezekben az esetekben is fennáll.

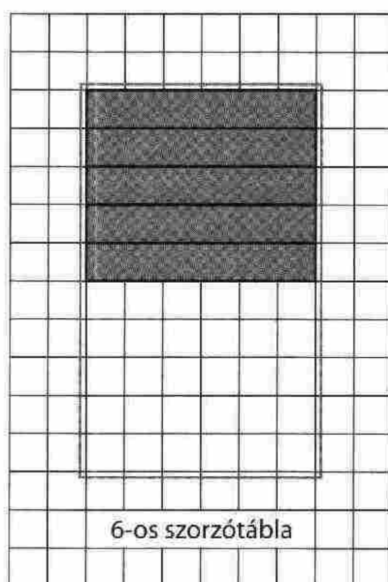
A 9-es szorzótábla hasonló feldolgozása felesleges, hiszen a 9-cel való szorzást mindig egyszerűbb úgy végezni, hogy a szám tízszereséből kivonjuk a számot. Ehhez ugyan szükség van a 10 bontásaira, de nincsen szükség átlépésre.

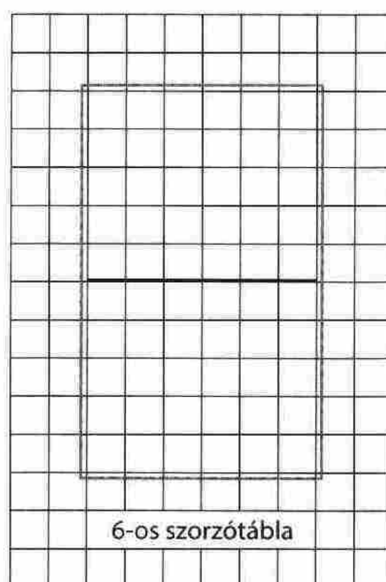
11. gyakorlat

Téglalap-vázlatok szorzótáblabeli következtetésekhez.

A szorzótábláról mint a szorzás és az osztás széles körű alkalmazásához szükséges egyik fontos előismeretről már szó esett az 5. fejezetben.

A szorzótáblát megjeleníthetjük a területi modell révén, segítve ezzel a megjegyzését, újbóli magunk elé képzelését. Először színes rudakat helyezünk 1 cm-es négyzetrácsozású papírra. Ábrázolhatjuk például a 6-os szorzótáblát. Ehhez rajzoljunk körül egy 6 cm széles és 10 cm magas téglalapot. Tegyünk egy (6-os értékű) lila rudat a téglalap tetejéhez, mutatva a 6·1 szorzást. Ezután egyesével tegyünk egymás alá újabb rudakat, bemutatva, hogyan épül fel a szorzótábla hatos lépésekből, egészen 6·5-ig. Nézzük át ezt az öt műveletet, eredményükkel együtt, véletlenszerű sorrendben, elvéve, majd ismét visszatéve a szükséges rudakat. A tábla alsó felét se sorrendben gyakoroljuk. Először konkrétan rakjuk ki a szükséges rudakat a papírra, később már ezek nélkül dolgozhatunk, elég lesz rátekinteni a 6·10-es téglalapra. A téglalap felét, a 6·5 szorzást a körülrajzolásnál is használt, vastag vonallal jelöljük meg. A 6·6 szorzásnál a diákok ettől a felezővonaltól indulnak. A 6·5-höz hozzáképzelnek még egy lila rudat, vagyis a 30-hoz 6-ot hozzáadva kapják meg az eredményt, a 36-ot. A 6·9 esetén a diákok elképzelik, hogy a téglalap majdnem tele van lila rudakkal. A választ úgy kapják meg, ha kivonnak 6-ot a 60-ból (ez egy egyszerű kivonás).





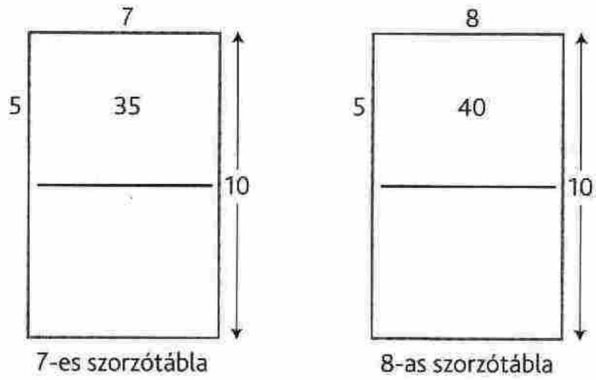
Ezután egy fontos lépés következik az absztrakt szint felé. Rajzoljunk üres papírra egy téglalapot, amely valamely szám szorzótábláját jelzi, egészen a tízszerezésig. Elég egy vázlat, nem szükséges precíz szerkesztés, négyzetrács vagy skálázás. Felezzük el a téglalapot egy vízszintes vonallal, emlékeztetve ezzel a diákot, hogy egy szám ötszöröse mindig fele a tízszeresének. A felső félbe írjuk bele a területét. Az ábrán is jelzett két további felirat (5 és 10) abban segíti a diákot, hogy valamely csomóponti szorzatból egy- vagy kétlépésnyit előre- vagy hátrafelé számolva bármely eredményt megkapjon.

(Folytatódik)

(Folytatás)

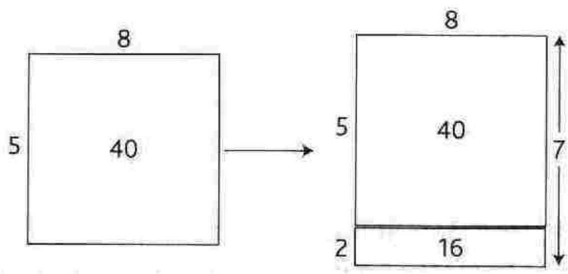
Például, ha a 7-es táblát vizsgáljuk, a vázlat a $7 \cdot 10$ és $7 \cdot 5$ csomóponti szorzatokat mutatja (a $7 \cdot 1$-en kívül), amelyekből a diák a $7 \cdot 2$, $7 \cdot 4$, $7 \cdot 6$, $7 \cdot 9$ szorzatokat egy (hetes) lépésben megkapja. Később már a csomópontoktól kétlépésnyire lévő szorzatokat ($7 \cdot 3$, $7 \cdot 7$, $7 \cdot 8$) is kérdezhetjük. Ha a diák megfelelő gyakorlatot szerzett az adott lépésközönkénti számlálásban (például az előző, 10. gyakorlat segítségével), képes lesz fejben megoldani az ilyen feladatokat. Azoknak, akiknek még nehézséget okoz az ehhez szükséges fejben számolás, tovább kell gyakorolniuk az összeadást és a kivonást (lásd a 2–4. fejezetet).

Ismételjük az eljárást mindegyik szorzótáblával, csak a csomóponti szorzatokat feltüntető vázlatot használva segítségül a fejben végzett számoláshoz.



Hasonló vázlatokat használhatunk az osztáshoz is. Például a 49:7 kérdésre azonban ne a 7-es szorzótábla elejétől (hetesével) lépegetve keressék a diákok a választ. Létezik jobb módszer is a vázlat használatához. A kérdést tegyük fel így: *Tudjuk, hogy $7 \cdot 10=70$ és $7 \cdot 5=35$. A 49 vajon a tábla első vagy második felében van?* [Válasz: a másodikban, hiszen 49 nagyobb 35-nél.] *Mennyivel több 49 a 35-nél: egy vagy több hetes lépéssel?* [Válasz: a 49 éppen 14-gyel több 35-nél, vagyis két hetes lépéssel több a $7 \cdot 5$-nél. Ezért $7 \cdot 7=49$, tehát $49:7=7$.]*

Ha a diák már biztosan tud kezelni különböző szorzótáblákat, fokozatosan elhagyhatja a teljes szorzótábla felvázolását minden kérdésnél, elég csak annak egy szükséges részletét megjeleníteni. Például, ha a $8 \cdot 7$ a kérdés, a diák legyen képes felismerni, hogy a $8 \cdot 5=40$ a legközelebbi csomóponti szorzat. Az eljárás, amellyel a $8 \cdot 5$-ös téglalapot kiegészítjük $8 \cdot 7$-essé, rávilágít arra, hogy két 8-ast kell hozzáadni az ismert számhoz, vagyis $8 \cdot 7=40+16=56$.

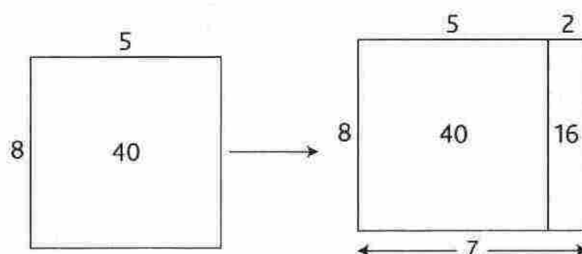


(Folytatódik)

* Kétségeim vannak, hogy egy gyerek, aki memóriaproblémái miatt nem tudja mondókaként megtanulni a szorzótáblát, ezt az eljárást végig tudná vinni. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

Mivel a diáknak ekkorra már értenie kell, hogy a szorzás kommutatív, bátoríthatjuk arra, hogy a szorzók sorrendjétől és nagyságától függetlenül feliratozza vázlatát. Így a téglalapok nemcsak függőlegesen terjeszthetők ki (lásd a fenti ábrát), hanem vízszintesen is (lásd a lenti ábrát). Kiterjeszthetők vagy csökkenthetők – megváltoztathatók –, a konkrét kérdéstől függően.



Álljon itt néhány példa arra, hogyan gyakoroltathatjuk a téglalapok feliratozási és megváltoztatási technikáját.

7·5=___, ezért 7·6=___
8·5=___, ezért 8·4=___

Akár túl is léphetünk az ismert (tízszer tízes) szorzótáblán.

15·10=___, ezért 15·11=___
12·5=___, ezért 12·6=___

Persze nem várható el, hogy a diák minden szorzótáblát tudjon, még 10·10-en túl is. Mutassunk rá, hogy a most gyakorolt módszer (új eredmények levezetése a már ismertekből) pontosan ugyanaz, mint amit a jó memóriájú matematikusok is rutinszerűen alkalmaznak olyan szorzások elvégzésekor, amelyek eredményét ők sem tudják fejből.

Végül adjunk a diákoknak vegyesen írásbeli szorzási és osztási feladatokat, az ismert szorzótáblán belül. Például 9·3, 24:6, 6·5, 15:5, 25:5 stb. Biztassuk a gyerekeket, hogy szemléltetőeszközök vagy papír és ceruza nélkül oldják meg ezeket, csak fejben felidézve, elképzelve a színes rudakból épített vagy papíron felvázolt téglalapokat, amelyekkel eddig gyakoroltak.

12. gyakorlat

Szemléltetőeszközök, téglalap alakú elrendezések, ábrák az osztás és bennfoglalás közti kapcsolat megvilágításához.

Az iskolában általában az osztás kétféle értelmezését tanítjuk: az osztást (részekre osztást) és a bennfoglalást (vagy csoportosítást). A diákok előbb a részekre osztással találkoznak, talán már iskolás koruk előtt, amikor egyesével kupacokba osztanak egy adott mennyiséget („egyet neked, egyet nekem"). A bennfoglalást alsó tagozaton a szorzás megfordításaként tanítjuk. Jóval később megtanítjuk, hogy a törtek az osztással vannak kapcsolatban, de az már nem mindig kap megfelelő hangsúlyt, hogy a tört mennyiségek szorosabban kötődnek az osztás „részekre osztás" értelmezéséhez, mint a „bennfoglaláshoz".

(Folytatódik)

(Folytatás)

Világítsuk meg a különbséget a 24:3 példáján. Részekre osztás esetén úgy adjuk a feladatot a diákoknak, hogy *Osszátok a 24-et háromfelé!*. Figyeljük meg, hogy a 24 elemet a maga fizikai valójában, egyesével három egyenlő kupacba adagolják szét („egyet ide, egyet oda, egyet amoda"). A válasz a kérdésre a kupacokban lévő elemek (egyenlő) mennyisége. Az eredmény mértékegysége megegyezik az osztandóéval. Ha például cukorkákat kell szétosztani, akkor az eredmény valahány cukorka lesz.* Ezzel ellentétben a bennfoglalási feladatot úgy kell megfogalmazni, hogy *Hány darab hármas csoportra osztható a 24?*. A gyerek – ha nem tudja a szorzótáblát, akkor is – elkezdi hármas csoportokba rendezni az elemeket, amíg mind a 24 el nem fogy. A válasz a kérdésre az (azonos méretű) csoportok száma.**

A matematikai nehézségekkel küzdő diákok általában összekeverik az osztás kétféle értelmezését. Megnehezíti a dolgukat, ha a tanár is váltogatja ezeket az órán, anélkül, hogy külön jelölést alkalmazna, vagy egyáltalán felhívná a figyelmet a kettő közti különbségre. Például, ha a gyerek 18 felét próbálja megtalálni (próbálja a 18-at részekre osztani), nem segíti őt annak ismerete, hogy hol található a 18 a 2-es szorzótáblában (mert ez a bennfoglaláshoz kapcsolódik). Pontosan meg kell mutatni a kétféle értelmezés közti kapcsolatot. Egy másik példa: ha a gyerek azon gondolkodik, hány négyfős csapatot lehet alkotni 52 játékosból, nem segítené őt a megoldásban, ha elnegyedelné az 52-t. Mindenekelőtt a két modell közti kapcsolatot kell megértenie.

Mindkét értelmezést meg kell tanítani, mivel más-más helyzetekre vonatkoznak – és ezt konkrét példákkal kell elmagyarázni. Jó módszer a kétféle értelmezés összekapcsolására, ha megmutatjuk a diákoknak, hogy a részekre osztás nem csak egyesével való kiadagolással oldható meg. A „körökre" osztás gyorsabb és hatékonyabb módszer. Ne egyesével osszuk szét az elemeket, hanem annyiasával, ahány részre kell osztani. Így az egy csoportba került elemek a jövőbeli szétosztás egy-egy „körét" képviselik. A 24:3 példájánál maradva: ne egyesével osszuk 3 kupacba az elemeket, hanem hozzunk létre hármas csoportokat, amelyek azt reprezentálják: ha valóban szétosztanánk három kupacba a 24 elemet, akkor az első csoport 3 eleme lenne a szétosztás első köre, a második csoport 3 eleme a szétosztás második köre, és így tovább. Az így kapott csoportok száma a kupacokba osztás köreinek (tehát az egyes kupacok létszámának, azaz a részekre osztás eredményének) felel meg. Vagyis *24 hárommal osztva*, azaz háromfelé osztva, harmadolva 8-as kupacokat képez. Ez a szétosztás direkt módon mutatja a *24-ben a 3* bennfoglalást is: a 24-ből 8 darab hármas csoport képezhető.

Az osztás területi modelljének egyik nagy előnye, hogy nem tesz különbséget osztás és bennfoglalás között. Az 5·3-as téglalapba rendezett 15 elem egyszerre mutatja a következő műveletek mindegyikét:

3 csoport ötös (azaz 5·3)
5 csoport hármas (azaz 3·5, ha elforgatva nézzük)
15 felosztása 3 egyenlő részre (15 elharmadolása, ahol egy rész 5 egységnyi)
15 felosztása 5 egyenlő részre (15 elötödölése, ahol egy rész 3 egységnyi)
15 felosztása hármas csoportokra (ezek 5-ször „foglaltatnak benne")
15 felosztása ötös csoportokra (ezek 3-szor „foglaltatnak benne")

Egy vázlatos téglalap 5 és 3 egységnyi oldalakkal kiválóan szemlélteti és modellezi valamennyi felsorolt műveletet (két szorzás és négy osztás; ez utóbbiakból kettő részekre osztás, kettő bennfoglaló).

* Valamivel komolyabb szinten, fizikai mennyiségekkel úgy szemléltethető a részekre osztás, hogy ha például egy 6 *méteres* deszkát kell felvágni három részre, akkor az lesz az eredmény, hogy mindegyik darab 2 *méteres*. (A ford. megjegyzése)

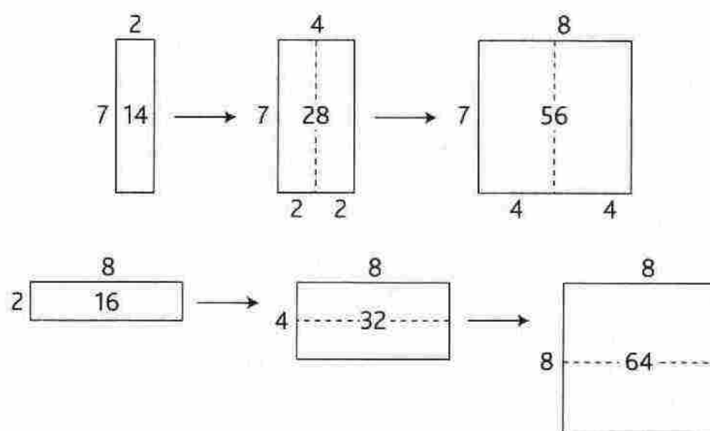
** Az eredmény ebben az esetben mindig egy mértékegység nélküli szám, darabszám. A 6 méteres deszkában például háromszor (3 *darabszor*) van meg a 2 méteres. (A ford. megjegyzése)

13. gyakorlat

Téglalapos ábrák szorzótáblabeli lerövidítésekhez.

A 11. gyakorlatban már bemutattuk, hogyan lehet téglalapok vázlatos rajzával elősegíteni a diákok szorzótáblára vonatkozó ismereteinek gyarapodását. A továbbiakban olyan lerövidítésekhez fogunk téglalapokat használni, mint a kettőzés és a felezés. Például a 7·4 szorzást, amelyet a diákok eddig a 7·5 csomóponti szorzatból egy hetes lépést visszafelé téve számolhattak ki, duplázás és újbóli duplázás útján is kiszámolhatják. A kettőzés előnye, hogy sem visszafelé számolásra, sem tízes átlépésre nincs szükség. Hasonló módon, kettőzésekkel előállítható a 8·7 is, az egyik leggyakrabban elrontott szorzás.*

A diákok a kiindulási téglalapot megkettőzhetik vízszintesen (mint az ábrán a 4·7 vagy 8·7 esetén) vagy függőlegesen (mint az ábrán a 8·4 vagy 8·8 esetén). A vázlatok támogatják a lerövidítést eredményező gondolati eljárást. Mint mindig, a cél most sem az, hogy a diák kezébe egyfajta receptet adjunk, amely mechanikusan előállítja az eredményt, hanem hogy megértse a számolási eljárás mögött meghúzódó gondolatot, a logikát.



A kettőzés hasznos lerövidítés egy szám négyszeresének vagy nyolcszorosának meghatározására.

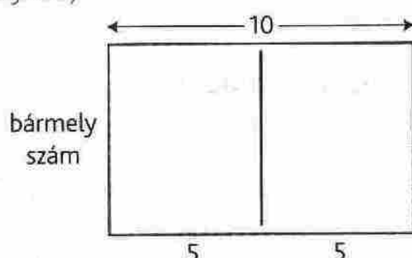
Ezeket a vázlatokat együtt is használhatjuk az előző fejezet 4. előismerete során bemutatott informális, nyilakat alkalmazó jelölésmóddal.

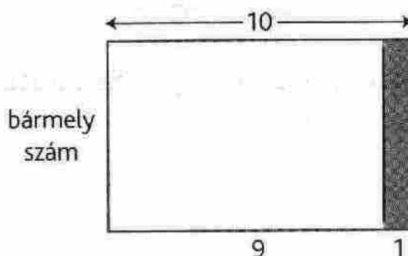
A téglalap-vázlatok akkor is jól használhatók, ha a diák egy szám ötszörösét határozza meg tízszeresének feleként, vagy egy szám kilencszeresét számítja ki a tízszereséből. („Így számolnak az okos gyerekek" – bátoríthatjuk tanítványainkat.)

(Folytatódik)

* Magyarul is van rá mondóka: „Nyolcszor hét az ötvenhat, amit a szamarak nem tudnak." (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

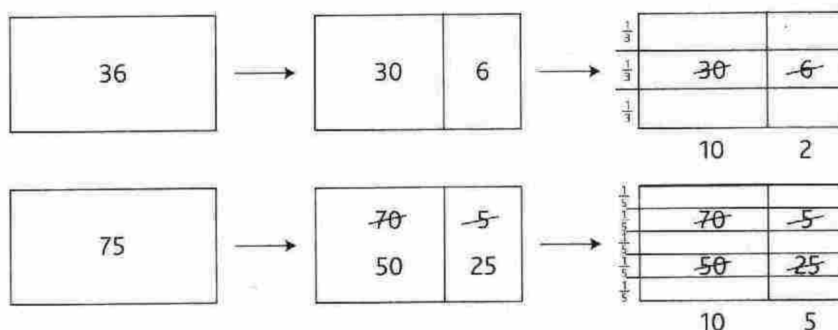




Hasznos lerövidítés annak felismerése, hogy bármely szám ötszöröse a tízszeresének a fele; továbbá bármely szám kilencszerese egy „szelettel", egy „csíkkal" kevesebb a szám tízszeresénél.

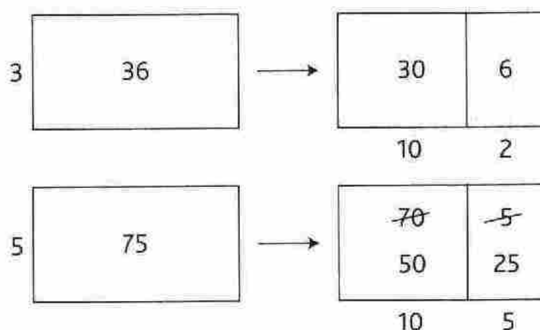
A téglalap-vázlatok segítik a különböző részekre osztós, törtes műveletek elvégzését is; például a 48 negyedének, a 39 harmadának vagy a 75 ötödének kiszámítását. Az eredményül kapott ábrákat megvizsgálva vitassuk meg a diákokkal, hogyan kapcsolódik mindez az osztáshoz, és hogy a számokat nem mindig a helyiértékek szerint érdemes összetevőkre bontani. Például a 75 ötödrészét nem könnyű kiszámítani, ha 7 tízesként és 5 egyesként tekintünk rá. Ha viszont 50+25 módon bontjuk ketté, akkor sokkal könnyebb lesz az eljárás.

Azok a diákok, akik a részekre osztást és a törteket papírhajtogatós gyakorlatok[2] segítségével tanulják, a vonalakat mint hajtási éleket rajzolják be a téglalapokba.



Részekre osztás, tört mennyiségek ábrázolása téglalap-vázlatokkal: 36 egyharmada, 75 egyötöde.

Mivel a harmad vagy ötöd rész meghatározása osztással jár, az osztandó célszerű bontása elősegítheti a megértést, hiszen a diákok általuk már ismert osztásokat végezhetnek el. A lépéseket és az eredményt jelöljük az ábra szerint.



Ezekbe a vázlatos ábrákba már nem rajzoltuk be a részekre osztó vonalakat.
Csak azt írtuk oda, hogy hány részre kell osztani a téglalapot.

A fentiek gyakorlása közvetlenül elvezet az egyjegyű számokkal, később a többjegyű számokkal végzett osztáshoz. Mindkettőt a 8. fejezetben tárgyaljuk részletesen.

14. gyakorlat

Különböző típusú szöveges feladatok, változó megfogalmazásban és kérdésfeltevéssel.

Fontos, hogy mind a szorzásra, mind az osztásra a gyakorlati életből is adjunk példákat, mégpedig olyan változatos nyelvezettel, szókinccsel, hogy a diákok ne egyszerűen csak végrehajtóként reagáljanak bizonyos kulcsszavakra („oszd fel, csoportosítsd" stb.). A feladatban megfogalmazott konkrét helyzet elképzelése hozzájárul, hogy a diák megértse a megoldás menetét.

A szöveges feladatok változatosabbá tehetők úgy is, hogy a kérdést nem mindig a szöveg végén tesszük fel, hanem már a közepén vagy akár az elején. Például hasonlítsuk össze egy adott probléma alábbi három, különböző megfogalmazását. Figyeljük meg a kérdés helyét az egyes megfogalmazásokban, és hogy mennyire eltérő szóhasználattal írható le ugyanaz az egyszerű helyzet.

A *Egy cipó 200 Ft. Mennyibe kerül 6 cipó?*
B *Mennyi pénzre van szükségünk 6 cipó megvételéhez, ha egy cipó ára 200 Ft?*
C *6 cipót szeretnénk venni. Mennyi pénzt fogunk elkölteni abban a boltban, ahol a cipók darabját 200 Ft-ért árulják?*

A szóhasználat változatossága és a kérdés helyének megváltoztatása természetesen osztási feladatokban is alkalmazható.

A megfogalmazás módjánál és a kérdés elhelyezésénél is fontosabb azonban, hogy a szorzási vagy osztási feladat melyik kategóriába tartozik. Legalább hat különböző típusuk létezik, bár a diákoknak általában csak kétfélét mutatnak meg. A hat kategória a következő:*

1. Feladatok egyenlő méretű csoportokról
2. Feladatok egyenlő mennyiségekről
3. Feladatok egyenes arányosságról – különösen több darab árucikk áráról
4. Feladatok téglalapok területéről vagy téglalapos elrendezésekről
5. Feladatok többszörözésekről
6. Descartes-szorzatot tartalmazó (párba állítási) feladatok

A diákok 1. és 3. típusú feladatokkal találkoznak leggyakrabban (mint azt saját cipóvásárlásos példám is mutatja). Az árakat tartalmazókhoz képest az egyéb arányossági feladatok már jóval ritkábbak. Az egyenlő mennyiségekről szólók is ritkák, pedig szorosan kötődnek az egyenlő méretű csoportok feladattípusához. Többszörözésekről és párosításokról szóló feladatokkal már csak elvétve találkozunk. Álljon itt mindegyik típushoz egy-egy szorzási és osztási példa.

1. Feladat egyenlő méretű csoportokról:
   Egy csomagban 6 ceruza van. Hány ceruza van 5 csomagban? [szorzás]
   Lili 30 ceruzát vásárolt 5 csomagban. Hány ceruza van egy csomagban? [osztás]

(Folytatódik)

* Ez a kategorizálás megítélésem szerint meglehetősen mondvacsinált és önkényes; az első öt típus között semmiféle lényegi különbség nincs. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

2. Feladat egyenlő mennyiségekről:
Mennyi szalagra van szükségünk 4 egyforma doboz körbekötözéséhez, ha mindegyik csomagra 80 cm szalagot kötünk?
Ha négy egyforma dobozt körbekötözünk szalaggal, mennyi szalagot használhatunk el egy dobozra, ha összesen 3,2 m szalagunk van?

3. Feladat egyenes arányosságról – de nem több darab árucikk áráról:
Hány km-t tesz meg két és fél óra alatt egy autó, óránként 40 km-es sebességgel haladva?
*Egy autó 40 km-t tesz meg óránként. Mennyi idő alatt tesz meg 100 km-t?**

4. Feladat téglalapok területéről vagy téglalapos elrendezésekről:
Az iskola aulájába székeket kell kirakni 12-es sorokba. Hány szék kell 15 sorhoz?
180 székből hány 12-es sor rakható ki?

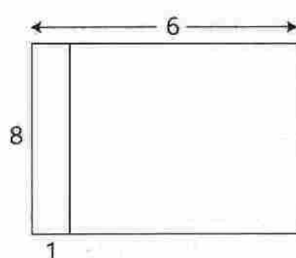
Az utolsó példához különösen könnyen kapcsolható a szorzás és az osztás területi modellje, de valamennyi fenti feladatot meg lehet közelíteni ugyanezen a módon, a diákok gondolkodását téglalap-vázlatokkal segítve.

5. Többszörözős feladat:
Apa éppen 6-szor annyi idős, mint Matyi. Ha Matyi 8 éves, mennyi idős apa?
Apa 48 éves, és éppen 6-szor annyi idős, mint Matyi. Hány éves Matyi?

Segít a diákoknak, hogy rájöjjenek, milyen műveletekről van szó, ha egymásra rajzolunk két téglalapot, amelyek egyikének területe hatszorosa a másikénak.

6. Descartes-szorzatot (párba állítást) tartalmazó feladat:
Egy kisüzemben háromféle méretű és négyféle színű tornadresszt gyártanak. Hány különböző féle dressz készül?
Egy kisüzemben különböző méretű és színű, összesen 12-féle tornadresszt gyártanak. A dresszek mérete lehet kicsi, közepes és nagy. Hányféle színű dressz készül mindegyik méretben?

Az ilyen feladatokat – különösen a szorzásos megfogalmazásúakat – érdemes téglalapba rajzolt mezőkkel szemléltetni (lásd az ábrát).



Színek:	1	2	3	4
Méretek: 1				
Méretek: 2				
Méretek: 3				

Az ábrák a többszörözős és a párba állítós feladatokat modellezik.

* A feladat konkrét „két és feles" számértékét nem tartom szerencsésnek, hiszen olyan gyerekekről beszélünk, akiknek még az egészek szorzása és osztása is nehézséget okoz. (A ford. megjegyzése)

15. gyakorlat

Az osztási maradék.

Térjünk vissza a legegyszerűbb (25 alatti eredményt adó) szorzásokhoz, és modellezzük ezeket diszkrét eszközökkel (számolókorongokkal, kavicsokkal, kis kockákkal). Például a diákok rendezzenek el 15 korongot hármasával egymás alatti sorokban, a 15:3 feladatot szemléltetve. A megoldást a sorok száma (az egy oszlopban lévő korongok száma) jelenti. Ezután 16 koronggal szemléltessük a 16:3 feladatot. Az előzőhöz hasonló elrendezést kapunk, de még marad egy korong. Ezt úgy helyezzük el, mintha egy új sor (egy új hármas) indulna. Az elrendezés már nem pontosan téglalap alakú, de mutatja az osztást magát – ez a teljes téglalap – és az 1 maradékot. A magányos korong értelmezésének bonyolultabb módja, ha nem 1 maradéknak tekintjük, hanem 1 korongnak 3 olyan közül, amely egy teljes új sort alkotna az elrendezésben: „1 a 3 közül". Ezt úgy írjuk le, hogy felülre írjuk az 1-est, alá a 3-ast: $\frac{1}{3}$. (Lásd még a 8. fejezet 8. gyakorlatát.)

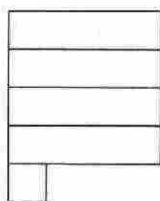


15:3=5

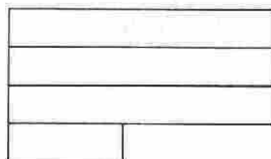


$16:3=5\frac{1}{3}$

Ismételjük meg az eljárást más 25 alatti számokkal és olyan osztókkal, amelyekkel kis maradék keletkezik; például: 13:4, 23:5, 17:4, 24:7, 19:6, 19:4 stb. Korongok helyett szemléltethetjük a feladatokat színes rudakkal is. A rudak arra kényszerítik a diákokat, hogy nagyobb egységekből (ebben az esetben: hármasokból) építsék fel az osztandót, ne egyesekből (vagy egyesével). További előnye a módszernek, hogy a maradék nagyon szembetűnő, hiszen más színű, mint a téglalap egésze.



$17:4=4\frac{1}{4}$



$24:7=3\frac{3}{7}$

Ha a diákok megértették az eljárást, nagyobb számokkal már ábrákban, vázlatokban dolgozzunk. Például a 37:5 feladatot papíron, ceruzával vázolják fel: hét darab ötös csík sorakozik egymás alatt, a 35-öt jelezve, és a maradék 2 (vagy a hányados törtrészeként: két ötöd).

(Folytatódik)

(Folytatás)

Végül gyakoroljunk szöveges feladatokkal, hogy a számokat legyen mihez kötni. Hívjuk fel a diákok figyelmét arra, hogy konkrét, valós helyzetekben mi lehet a maradék (vagy a hányados törtrészének) jelentése. Bizonyos dolgok (alma, tábla csoki, zenei hangok hossza stb.) törtrészekre osztásának van értelme, lehet belőlük maradékot képezni. Más esetekben (emberek, járművek, biliárdgolyók stb.) ez nyilván nem így van. Ha a felosztás nem lehetséges, akkor egészre kerekített eredményt kell adnia a diáknak, néha nem is egyszerűen a kerekítés szabályainak megfelelőt. Ilyenek lehetnek például az újracsomagolási problémák: *Anya lufikat vásárol a szülinapi bulira. Egy csomagban 10 (nem felfújt) lufit árulnak. Anya három (felfújt) lufit akar adni minden vendégnek.* Ha az a kérdés: *Hány csomag lufit vegyen anya 14 vendég számára?*, akkor a választ, hiába csak egy kicsivel több 4-nél, felfelé kell kerekíteni 5-re, különben nem jut minden vendégnek elegendő lufi. Ha viszont az a kérdés: *Hány vendéget hívhatunk a buliba, ha anya 2 csomag lufit vásárolt?*, akkor hiába van a hányados közelebb a 7-hez, mégis lefelé, 6-ra kell kerekíteni, mert különben megint csak nem jut minden vendégnek elegendő lufi. (A 8. fejezetben még szólunk a maradékról.)

Mit tanítsunk ezután?

A 7. és 8. fejezet gyakorlatai a formális, írásbeli szorzás és osztás algoritmusának megértését és sikeres végrehajtását szolgálják. A 9. fejezetben a szorzáshoz és az osztáshoz kapcsolódó következtetésekről lesz szó.

Hivatkozások

[1] A gyakorlat Sharma professzor ötletén alapul: M. Sharma (1980) 'Multiplication', *Math Notebook*, vol. 1, no. 9; (1988) 'Division', *Math Notebook*, vol. 6, nos 3 and 4.

[2] S. Chinn and R. Ashcroft (1998) *Mathematics for Dyslexics: A Teaching Handbook*, ch. 11, Whurr.

7. FEJEZET

Átmenet a területi modell és az írott algoritmus között szorzás esetén

Áttekintés

A számolásban gyenge diákoknak leginkább azzal segíthetünk, ha sokat gyakorlunk velük szemléltetőeszközöket használva. Az ezekkel való kísérletezgetés és a róluk folyó beszélgetés (annak megfogalmazása, hogy éppen mi történik) képessé teszi őket arra, hogy felismerjék a kapcsolatot a matematika különböző területei között. Kezdik megérteni, hogy bizonyos számolási eljárások miért és hogyan vezetnek el a kívánt eredményhez. Az eszközök használata azonban nem a végcél, nem azt akarjuk elérni, hogy a diákok teljesen mechanikusan állítsák elő segítségükkel a megoldást. A szemléltetőeszközök előnye az új fogalmak tanulása–tanítása terén a „papír–ceruza módszerhez" képest éppen az, hogy jobban elősegítik a gondolkodási modellek kialakulását.

Ebben a fejezetben lépésről lépésre haladva mutatjuk be azt a rendkívül fontos fejlődést, amely a konkrét tevékenységtől az elvont gondolkodásig vezet: az ábrákat, vizualizációs technikákat alkalmazó gyakorlatoktól a kognitív modellig.

Nem hiszek abban, hogy az írásbeli szorzás algoritmusa egyszerűen bebiflázandó, követendő recept lenne. A gyenge memóriájú diák kezdetben képtelen megfelelő sorrendben végrehajtani a szükséges lépéseket. Ha passzívan csak követi az utasításokat, soha nem is fogja megérteni, mit csinál. Ha viszont megérti az egyes lépéseket, képes lesz „a kályhától indulva", következtetések révén boldogulni a feladattal – még akkor is, ha cserbenhagyja a memóriája.

Szakmai vita folyik arról, hogy az írásbeli szorzás során fejben kell-e tartania a diáknak minden számjegy valódi (helyiértékkel együtt értendő) értékét.[1] Szerintem ez túlzott elvárás. Fejben végzett számolásnál vagy számegyenesen végzett munkánál nyilván szükség lehet erre. Az írásbeli szorzás lényege és előnye, hogy számolás közben elég csak a szám alaki értékére figyelni, helyiértéke tulajdonképpen lényegtelen. Mindegyik számjegy egyjegyű számként kezelhető.* A szorzás területi modellje viszont kiváló módszer arra, hogy elkerüljük az esetleges buktatókat. Biztos alapot ad az elvont, formális algoritmus kezeléséhez, mindenféle zavaró mondókák mormolása és mechanikus eljárások begyakorlása nélkül.

A szorzás területi modelljét egy vagy több vázlatos téglalap segítségével jegyezhetjük le: ez a „rekeszmódszer". Ehhez hasonló, elterjedtebb, de elvontabb lejegyzési mód a „rács-módszer".

* Mivel az angol gyakorlatban az írásbeli szorzás teljesen másként megy, mint nálunk, ezeket a megállapításokat (sőt, az egész fejezetet) csak erős kritikával lehet adaptálni. Magam több helyütt nemcsak lefordítottam, hanem kissé át is írtam a szöveget, a hazai körülményekhez igazítva azt. Bizonyos értelemben a mi írásbeli szorzásunkban is lényegtelen a helyiérték, hiszen minden oszlopban ugyanúgy kell eljárni, viszont a maradékok átvitelekor vagy a részszorzatok lépcsőzetes egymás alá írásakor már nagyon is fontos figyelni rá. (A ford. megjegyzése)

·	30	4	
10	300	40	340
2	60	8	68
			408

	30	4
10	300	40
2	60	8

300+60+40+8=408

A rács-módszer és a területi modell (vagy rekesz-módszer) összehasonlítása.

A rács-módszer a szorzás területi modelljének egyszerűsített változata. Ekkor a diákoknak a számokat helyiértékek szerint kell bontaniuk, és a rács egyes mezőibe írva külön-külön összeszorozniuk őket, majd részösszegeket képezni, és végül összeadni ezeket.

Én magam a területi modellt (a rekesz-módszert) részesítem előnyben, mert rugalmasabb. A diák tetszése szerint, saját következtetéséhez igazítva alakítja ki az ábrát. Ez a módszer a szigorúan helyiértékek szerinti bontás helyett lehetővé teszi a számok hatékonyabb, célszerűbb bontását, és nem írja elő a szorzások sorrendjét sem. További előnye, hogy a nagyobb számokat nagyobb téglalap jelzi, még ha precíz skála híján csak körülbelüli becslésre hagyatkozunk is. A diákok ezt általában nagyon szeretik. A rekeszek a rácsnál sokkal egyértelműbben megkülönböztetik a számítás lépéseit: mikor, hol történik szorzás, a végén összeadás – ez utóbbiról a diák eldöntheti, hogy fejben, számegyenesen vagy írásban hajtja-e végre.

A felső tagozatba lépő diáktól elvárják, hogy képes legyen az írásbeli szorzás elvégzésére. Abban egyetértek a központi előírásokkal, hogy a diák már alsóban megtanulhassa ezt a módszert. Az absztrakt eljárás azonban csak azoknak ajánlható, akik a szemléltetőeszközös, ábrázolásos szinten már otthonosan mozognak, és értik a jelölés mögötti tartalmat is. Viszont bármennyi idős is egy diák, ne ragaszkodjunk ahhoz, hogy így szorozzon, ha jobban boldogul a téglalap-vázlatokkal és a rekesz-módszerrel. Valamennyi szorzási feladat, amely a mindennapi életben vagy akár egy vizsgán előkerülhet, éppúgy megoldható ezekkel a vázlatrajzokkal, mint formális írásbeli módon. A rekesz-módszer teljességgel megfelelő, hatékony és pontos alternatívája az írásbeli szorzásnak. Ha a diák szükségét érzi a formális írásbeli módszer használatának, a hagyományos eljárás kissé módosított, kiterjesztett változatát taníthatjuk neki (lásd a 3. gyakorlatot).

Az írásbeli szorzáshoz vezető gyakorlatok

1. gyakorlat: A szorzótábla tágabb összefüggésekbe helyezése.

2. gyakorlat: A szorzás területi modellje. A megoldáshoz előbb különböző rekeszek területét határozzuk meg, aztán összegezzük a részeredményeket.

3. gyakorlat: A téglalap-vázlat és a hagyományos írásbeli szorzás közötti összefüggés felismertetése.

4. gyakorlat: A rekeszek számának csökkentése kétjegyű szám egyjegyűvel való szorzásakor.

5. gyakorlat: Rugalmas bontás.

6. gyakorlat: Többjegyű számok szorzása.

7. gyakorlat: A téglalap legfeljebb négy rekeszre bontása.

A szorzás területi modelljétől a sztenderd írásos algoritmusig

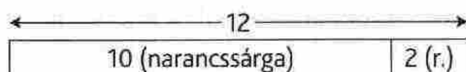
Az első gyakorlat előtt

Bizonyosodjunk meg róla, hogy a diákok rendelkeznek a szükséges előismeretekkel, és megértették a szorzás területi modelljét. Az 5. fejezetben az előismereteket, a 6. fejezetben a modell lépésről lépésre történő megtanítását tárgyaltuk részletesen. A 7. fejezet gyakorlatait a diákok csak akkor fogják tudni elvégezni, ha már készségszinten képesek alkalmazni a szorzásnál használt téglalap-vázlatokat. Tisztában kell lenniük a helyiértékek fogalmával is, hogy gond nélkül szorozzanak és osszanak számokat tízzel vagy százzal.

1. gyakorlat

A szorzótábla tágabb összefüggésekbe helyezése.

Vegyük át a diákokkal a szorzótáblát, és mutassunk rá, hogy abban az egyjegyű számok egymással alkotott minden lehetséges szorzata megtalálható, egészen 10·10-ig. Ha ennél nagyobb számokat akarunk összeszorozni, akkor ki kell terjesztenünk a szorzótáblát. Foglalkozzunk előbb olyan esetekkel, amelyekben csak az egyik tényező (a szorzandó vagy a szorzó) nagyobb 10-nél.* Ekkor legalább az egyik szám legalább kétjegyű, így a területi modell alkalmazásakor több téglalapot kell rajzolnunk (vagy egy nagy téglalapot kell több részre osztanunk). Például szorozzuk meg a 12-t bármely számmal (az alábbi ábrán 8-cal szorzunk). Rakjuk ki a szorzást először színes rudakból. A 12-es sor két darabból épül fel.** Ezekből nyolcat-nyolcat egymás alá téve jól látható az ábrát felépítő két téglalap (illetve, hogy hogyan bontható a nagy téglalap két kisebbre), hiszen a nagy téglalapot alkotó két kisebb eltérő színű (narancssárga és rózsaszín).



r. = rózsaszín

narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.
narancssárga	r.

Ha a 12-t felépítjük két rúdból, és egymás alá helyezzük a 12-eseket, az eredményül kapott téglalap jól láthatóan két kisebb (eltérő színű) téglalapra tagolódik.

* Az ilyen műveleteket nevezi az angol szakirodalom „rövid szorzásnak" (short multiplication). A „hosszú szorzásban" (long multiplication) mindkét tényező nagyobb 10-nél. Itthon ez a megkülönböztetés nem használatos. (A ford. megjegyzése)

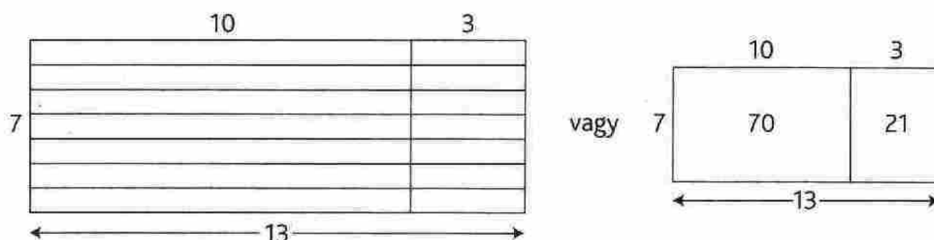
** A magyar színesrúd-készletben van 12 egység hosszú darab is (zöld színű). A cél érdekében itt mégis két külön darabból rakjuk össze. (A ford. megjegyzése)

2. gyakorlat

A szorzás területi modellje. A megoldáshoz előbb különböző rekeszek területét határozzuk meg, aztán összegezzük a részeredményeket.

Rajzoljunk egy 13·7-es téglalapot az alábbi ábra szerint. A teljes szorzatot jelző egész téglalapot osszuk részekre. Kezdetben célszerű berajzolni a hét sort is (bal oldali ábra), a színes rudakból felépített téglalapra utalva. Biztassuk a gyerekeket arra, hogy minél hamarabb hagyják el a sorokra osztást.

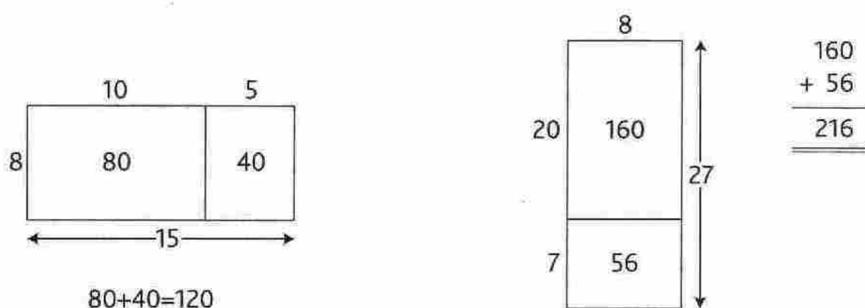
Példa: 13·7



Írjuk be az egyes rekeszekbe a részszorzatokat. Ehhez a diákok használják a korábban tanult és gyakorolt szorzási módszerek közül a nekik legmegfelelőbbet (lásd a 6. fejezetet; hogyan kapják meg a 10-zel vagy 5-tel való szorzásból a többi eredményt stb.).

A diákok fogalmazzák meg saját szavaikkal, hogy miért kell összeadni a kapott két részeredményt. Ha szükséges, vastagon vagy színessel rajzoljuk körbe az eredeti, 13·7-es téglalap kerületét, hogy lássák, a teljes terület két kisebb terület összege. Írjuk a 70+21 összeadást a vázlat alá, és a diákok végezzék el fejben a műveletet. Ha az összeadás nem olyan könnyű, mint ebben a példában, akkor a két részeredményt egymás alá írva, írásban is összeadhatják. Ne felejtsük, hogy a téglalapot feloszthatjuk függőlegesen és vízszintesen is (lásd a 6. fejezet 11. és 13. gyakorlatát).

Példák: 15·8 és 27·8

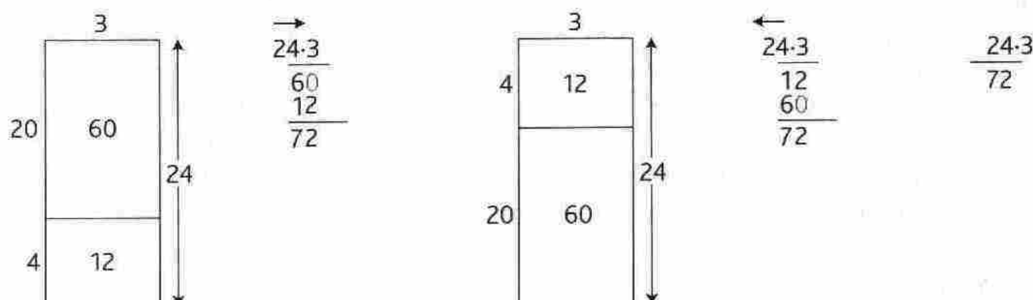


3. gyakorlat

A téglalap-vázlat és a hagyományos írásbeli szorzás közötti összefüggés felismertetése.

Az írásbeli szorzás tulajdonképpen a szorzótábla kiterjesztése az egyjegyű számoknál nagyobb tényezőkre. Először persze a legegyszerűbb esetet vezetjük be, kétjegyű és egyjegyű számok szorzását. Olyan számokat válasszunk, amelyekben minden számjegy kisebb 5-nél, hogy a diákok az éppen végzett tevékenység logikájára tudjanak figyelni, ne az aktuális szorzat meghatározására pazarolják az energiájukat.*

Írásbeli szorzásnál az egyik tényezőt aláhúzzuk. A másik tényezővel (illetve sorban annak számjegyeivel) szorozzuk meg az aláhúzottat, a keletkezett részszorzatokat egymás alá írva, ügyelve a helyiértékre. Aláhúzhatjuk a bal vagy a jobb oldali tényezőt, a szorzást kezdhetjük az egyesek felől, a nagyobb helyiértékek felé haladva, vagy éppen az ellenkező irányból. Mivel ebben a gyakorlatban a területi modellhez akarjuk kötni az írásbeli szorzást, a „kétjegyűször egyjegyű" szorzatban az utóbbit húzzuk alá, és azt szorozzuk sorban a kétjegyű számjegyeivel. A keletkezett részszorzatok éppen azok, amiket a területi modellben, a kétjegyű számot helyiértékek szerinti részekre bontva, az egyes rekeszek részterületeként kapunk. Például a 24·3 szorzatban 20·3+4·3 módon bontjuk fel a téglalap területét, azaz 60+12=72 módon kapjuk az eredményt. Ugyanígy járunk el írásbeli szorzás esetén. (Balról, a tízesek felől kezdve a 24 számjegyeivel való szorzást. Kezdhetjük jobbról, az egyesek felől is; ekkor a teljes analógiához téglalapunkat alulról felfelé haladva kell két részre bontani.)



A 20·3=60 részszorzatban az egyesek helyén álló helyiértékpótló nullát (az ábrán szürkével jelöltük) kezdetben írjuk ki, hiszen így teljes a kötődés a téglalap-vázlathoz, és ez a korrekt eredménye a „hússzor három" módon megnevezett szorzásnak. Ügyeljünk rá, hogy a leírt részszorzatok helyes helyiérték-oszlopba kerüljenek: egyesek az egyjegyű szorzó alá stb. Később, amikor a diák már gyakorlatot szerzett az írásbeli szorzás terén, megmutathatjuk: mivel akárhány tízesnek egy egyjegyű számmal való szorzata úgyis 0-ra végződik, ezt akár el is hagyhatjuk, a lépcsőzetesen egymás alá írt részszorzatok mindig kijelölik a helyes helyiértéket. (Ekkor már elég „kétszer három" módon megnevezni az éppen végrehajtott lépést, nem kell a szám alaki értékét valódi értékén kezelni; csak arra kell figyelni, hová, melyik oszlopba írjuk a szorzatot.)

(Folytatódik)

* Mivel az angol írásbeli szorzás módszerében és formájában is teljesen eltér az itthon tanított és használt változattól, ez a gyakorlat (és néhány további) az eredeti szövegnek nem egyszerű fordítása, hanem a hazai viszonyokhoz való alkotó hozzáillesztése. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

Megítélés kérdése, hogy könnyebb-e a másik irányban, a bal oldali tényező aláhúzásával végrehajtani a szorzást. Bár egyjegyű számmal való szorzáskor látszólag nem lesz több részszorzat, amiket aztán össze kell adni, ezt valójában menet közben, fejben kell megtennie a diáknak, a maradék átvitelével. A matematikai nehézségekkel küzdő diák számára ez megnehezíti a feladatot. Nem beszélve arról, hogy nem tud segítségképpen a területi modell ábrájára támaszkodni, hiszen a felosztásból származó részterületeket fejben át kell csoportosítania: az egyesek szorzásából keletkező részeredmény tízes helyiértékű részét hozzá kell adnia a tízes szorzásból keletkező részeredményhez. Ezt a megcélzott, részképesség-zavarral küzdő gyerekektől aligha várhatjuk el – ami egyúttal azt is jelzi, hogy a diákok, akik a szorzás ilyen módját gond nélkül elsajátítják és alkalmazzák, bizony nem csekély szellemi teljesítményt hajtanak végre.

Mint már utaltam rá, nem cipelhetjük magunkkal a végtelenségig a számok valódi értékét, az ezzel való számolást. Érdemes megvitatni a diákokkal, hogy melyik számítási módszernek, segédletnek mi az előnye, meddig ésszerű ragaszkodni hozzá, mikor kell továbblépni – hiszen a cél végül is az írásbeli műveletek elsajátítása, megtanulása, a helyiértékekben való gondolkodás megerősítése. Ebben a fejezetben éppen ezt szeretnénk elérni, kapcsolatot teremtve a korábbi, például vázlatrajzos modellek és a sztenderd írott algoritmus között, lépésről lépésre áttérve az utóbbira. Ez pedig nem igényli, hogy a számjegyeket valódi értékükben használjuk – éppen ez teszi lehetővé, hogy a számítást algoritmusba tömörítsük, amely gyorsan és könnyen végrehajtható, ha már sikerült megérteni és begyakorolni. Így a diák képes lesz a módszert többjegyű számokra is kiterjeszteni és alkalmazni.

Azoknak a diákoknak, akik nem boldogulnak a helyiértékes számolással, netán keverik a szám helyi- és alaki értékét, segíthet, ha a kétjegyű (később még több jegyű) szám jegyei fölé kiírják a helyiértékek nevét (illetve kezdőbetűjét: egyesek, tízesek, majd százasok stb.) A 24·3 szorzás esetén a következő érveléssel kísérhetjük (fennhangon) a művelet végrehajtását: *4-szer 3 az 12, amit a vonal alá írunk, a megfelelő helyiérték-oszlopba; 2-szer 3 az 6, vagyis helyiérték szerint 2 tízesszer 3 az 6 tízes, amit a következő sorba, a megfelelő helyiérték-oszlopba írunk. A végeredmény a két részszorzat összege, azaz 12+60, vagyis 72.*

Példa: 24·3

	3
4	12
20	60

24

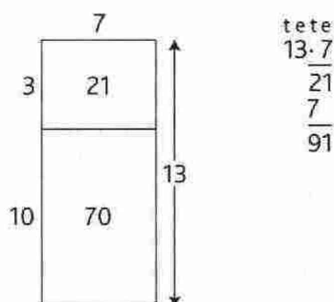
```
 tete
 24·3
   12
   6
   72
```

24·3=12+60=72

(Folytatódik)

(Folytatás)

Példa: 13·7



13·7=21+70=91

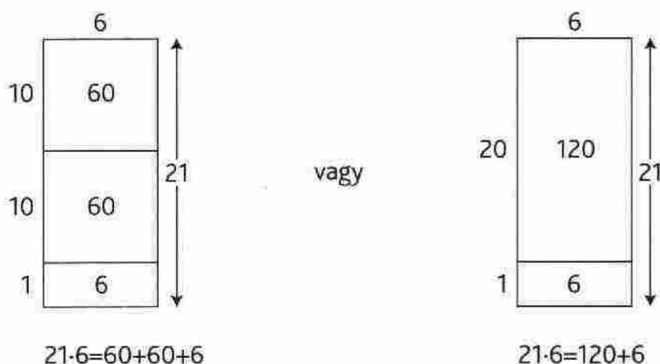
Az írásbeli szorzást a téglalap-vázlattal együtt kezelve jól látható, hogy a két módszer azonos módon kezeli a kétjegyű számot, nevezetesen tízesekre és egyesekre bontja. Így a két eljárás ugyanazt a két részszorzatot hozza létre, amelyek összegzésével megkapjuk a végeredményt.

4. gyakorlat

A rekeszek számának csökkentése kétjegyű szám egyjegyűvel való szorzásakor.

Az olyan szorzások kiszámítását, mint például 21·6, a diákok kezdhetik úgy, hogy először három részre bontják a 21-et: 10+10+1. Ez a számolási mód látható az alábbi, bal oldali ábrán. Ez azonban a végül összeadandó sok részösszeg miatt körülményes, nem célszerű eljárás. Arra kell biztatni a diákokat, hogy csak két részre (tízesekre és egyesekre) bontsák a 21-et, 20+1 módon, és így számolják ki a megoldást (lásd a jobb oldali ábrán).

Példa: 21·6



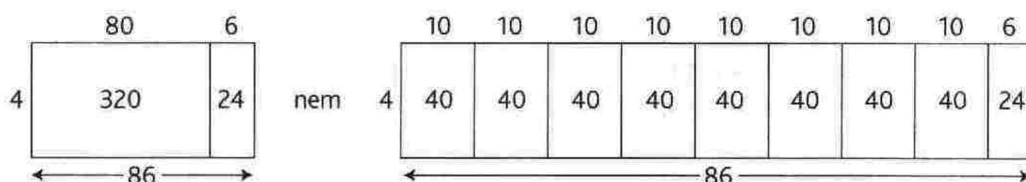
21·6=60+60+6 21·6=120+6

Különösen szembetűnő a csak két részre bontás előnye, ha még nagyobb kétjegyű számról van szó. Egy olyan szorzásban, mint például 86·4, a két részre bontott téglalappal, a 320+24 összegzéssel meg is kaptuk az eredményt – a 40+40+40+40+40+40+40+40+24 összegnél ez nyilvánvalóan sokkal előnyösebb.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Példa: 86·4

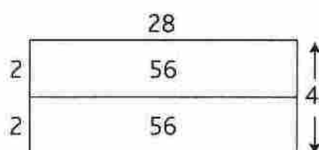


A diákok addig gyakoroljanak, amíg magabiztosan nem képesek bármely kétjegyű és egyjegyű szám szorzatát mindössze három lépésben meghatározni: a téglalap két rekeszének területét kiszámítani, majd ezeket összegezni.

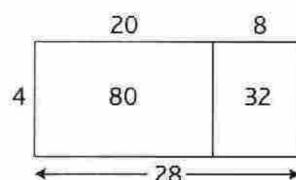
5. gyakorlat

Rugalmas bontás.

A téglalapok részekre bontása mégsem mindig helyiértékek szerint a legcélszerűbb. Éppen ez az előnye a rekesz-módszernek a rács-módszerrel szemben. Egy olyan szorzás, mint például a 28·4, kétféleképpen is könnyen elvégezhető: a 4 két 2-esre bontásával duplázás, aztán egy újabb duplázás révén; illetve a 28 tízesekre és egyesekre bontásával, majd a részszorzatok összeadásával. A 27·8 szorzást viszont sokkal könnyebb kiszámolni a 27=25+2 bontással, mint a helyiértékek szerintivel.

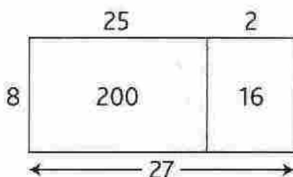


ugyanolyan könnyű, mint

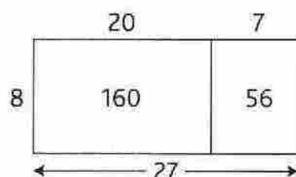


28·4=56+56=112

28·4=80+32=112



könnyebb, mint



27·8=200+16=216

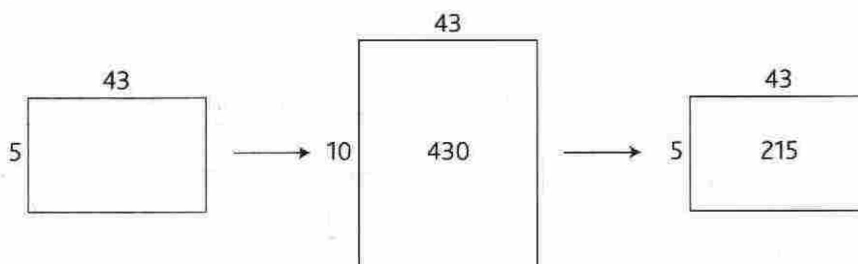
27·8=160+56=216

A rekesz-módszer lehetővé teszi a bontás rugalmas alkalmazását.

Hasonlóan, egy szám 5-tel való szorzása könnyen elvégezhető a kétszer akkora területű téglalap felezésével. Ez pontosan ugyanaz a módszer, amelyet a szorzótábla csomóponti szorzatait és lerövidítéseit tanítva követtünk (lásd az 5. fejezet 7. előismeretét).

(Folytatódik)

(Folytatás)

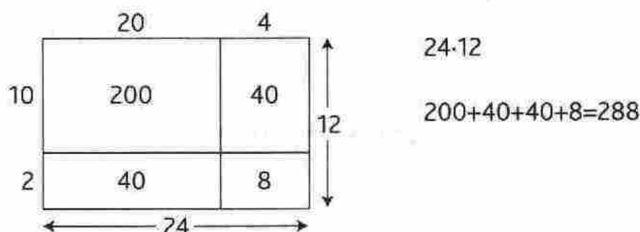


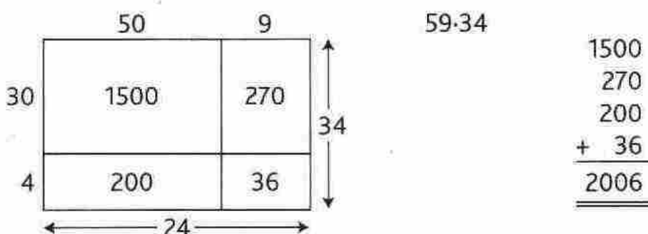
Egy szám ötszörösét meghatározhatjuk úgy is, hogy elképzeljük a kétszer akkora területű téglalapot (ami a szám tízszeresét jelenti), majd elfelezzük az eredményt.

6. gyakorlat

Többjegyű számok szorzása.

Kétjegyű számok egymással való szorzásakor körültekintően kell alkalmazni a rekesz-módszert. Bizonyos esetekben az eljárás egyszerű és világos, mint első példánkban (lásd az ábrát), máskor viszont bonyolult végső összegzéshez vezet, mint második példánkban. A diákok mindig választhassanak, hogy a részszorzatok összegzését egymás mellé írt számokkal, fejben vagy egymás alá írt számokkal, írásban kívánják elvégezni. Második példánkban az utóbbi a járhatóbb út.





(Folytatódik)

(Folytatás)

Itt ismét előkerülhet a sztenderd írásbeli algoritmus, mint azt a 3. gyakorlatban már láttuk. Figyeljünk arra, hogy az egyes sorokba írt részeredmények eleve a rekesz-módszer bizonyos részszorzatainak összegével egyenlők. Éppen ez a tömörítés adja az írásbeli szorzás hatékonyságát, gyorsaságát – és ugyanez okoz nehézséget a matematikai gondokkal küzdőknek. A 34·12 példáját véve: ha a jobb oldali tényező felé szorzunk, akkor a téglalap-vázlat részszorzatai közül az egymás alatt lévők összege alkot egy-egy sort, részeredményt az írásbeli szorzatban; ha a bal oldali tényező felé szorzunk, akkor pedig a vázlat egymás melletti részszorzatai. (A számítás során az ábrán szürkével jelzett 0-t kezdetben írjuk ki. Később, elegendő gyakorlás után, a megértés magasabb szintjén már elhagyhatjuk.) Speciálisan az 1-es számot tartalmazó szorzó esetén később alkalmazhatjuk azt a rövidítést, hogy nem húzzuk alá a másik tényezőt, nem írjuk le újra részszorzatként, hanem az összegzés során felhasználjuk magát a számot.

<u>Példa:</u> 34·12

	30	4
10	300	40
2	60	8

```
34·12      34·12      34·12
 360        340         68
  48         68        408
 408        408
```

300+60+40+8=408

A téglalap-vázlat és az írásbeli szorzás együttes tanulmányozása segíti a megértést.

A rekesz-módszer kiválóan szemlélteti, hogy mit jelent, hogyan működik az írott algoritmus. Segítségével elkerülhető számos gyakori hiba; például, hogy az egyes sorok nem megfelelő helyiértékben kerülnek egymás alá. Ezért hasznos kezdetben (az ábrákon szürkével jelölt) helyiértékpótló nulla (nullák) kiírása, mert így teljes a megfelelés a téglalap-vázlat részszorzataival. Később, elegendő gyakorlás után ezek a nullák már elhagyhatók, de figyelni kell az egyes sorok lépcsőzetes egymás alá írására. (Gyakori hiba, hogy ha az egyik részszorzat még az elhagyott 0 után is 0-ra végződik, akkor elcsúsznak egymáshoz képest az oszlopok; lásd az ábrán a 62·53 példáját.) Ez a fejlődés a konkrét szinttől az absztrakt szint felé haladás egyik szakasza, amelynek során elszakadunk a számok valódi értékétől, és csak alaki értékükkel számolunk, a helyiértéket a megfelelő oszlopba való írással kifejezve.

<u>Példa:</u> 62·53

	60	2
50	3000	100
3	180	6

```
        62·53              62·53
         310               3100
nem      186       hanem    186
         496               3286
```

3000+180+100+6=3286

A téglalap-vázlat segíti a diákot, hogy elkerülje a gyakori hibákat.

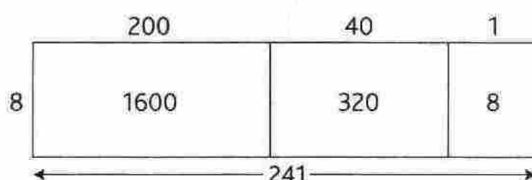
7. gyakorlat

A téglalap legfeljebb négy rekeszre bontása.

Mint az előző gyakorlatban is láttuk, a rekesz-módszer használata során a tényezők számjegyeit és a részszorzatokat is valódi értékükön kezeljük. Ezért a módszer nem igazán használható, ha nagy számok szerepelnek a műveletben. Egy olyan feladatot, mint például 31000·1400, sokkal könnyebb kiszámolni hagyományos írásbeli szorzással, mint téglalap-vázlat segítségével. (A legkönnyebb persze zsebszámológéppel.)

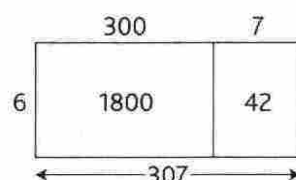
A rekesz-módszer általában igen nehézkessé válik, ha két- és háromjegyű vagy két háromjegyű számot kell összeszorozni. Ekkor a diákok azzal szembesülnek, hogy hat vagy kilenc részszorzatot kell összeadniuk. A módszer viszont még mindig jól használható, ha háromjegyű számot szorzunk egyjegyűvel; például: 241·8 vagy 307·6.

Példa: 241·8



241·8=1600+320+8=1928

Példa: 307·6



307·6=1800+42=1842

Egyfajta „főszabályként" megállapíthatjuk, hogy ha egy szorzás rekesz-módszerrel történő megoldása a téglalap több mint négy részre osztását kívánná, akkor célszerűbb az absztrakt és tömör írásbeli algoritmussal kiszámolni (vagy számológéppel). A területi modell és az írásbeli szorzás párhuzamos gyakorlása megmutatja, miért és hogyan működik az utóbbi. Ha a diák megértette ezt, képes lesz az előbbi helyett az utóbbit alkalmazni.

Mit tanítsunk ezután?

A 9. fejezetben megtanítjuk a diákot arra, hogyan következtessen ismert szorzási eredményekből újakra, és hogyan tegye egyszerűbbé a számítást.

Hivatkozás

[1] Ian Thompson érdekfeszítő érvelése ebben a kérdésben: I. Thompson (2003) 'Place Value: The English Disease?', ch. 15 in *Enhancing Primary Mathematics Teaching*, ed. I. Thompson, Open University Press.

8. FEJEZET

Átmenet a területi modell és az írott algoritmus között osztás esetén

Áttekintés

Mint azt korábban már kifejtettem (lásd az 5. fejezet eleji Áttekintést), az osztás tanítására a szorzás területi modelljéhez való szoros kapcsolódást javaslom, nem pedig az ismételt kivonás módszerét.* Meg vagyok róla győződve, hogy az osztást is jobb előrefelé, nem pedig hátrafelé számolásként tanítani. Szorzatként felépíteni a kívánt osztandót a lehető leghatékonyabb módszer. Úgy vélem, minden diáknak így kellene tanítani az osztást, nem csak a matematikai nehézséggel küzdőknek.

A tanítás–tanulás módszereire vonatkozó javaslataim mindig a *megértés tanítását* célozzák. Nem hiszem, hogy bármely diáktól (különösen a matematikai nehézséggel vagy gyenge memóriával küzdőtől) elvárható lenne, hogy az írásbeli osztás algoritmusát, annak összetett lépéseit pusztán mechanikusan memorizálja és alkalmazza, azaz bebiflázza. Az idősebb diákok az írásbeli osztás helyett már nyugodtan használhatnának számológépet. Amíg azonban a diákok az iskolában kénytelenek bonyolult feladatokat papíron, ceruzával megoldani, meg kell találnunk a módját, hogyan segíthetünk nekik. Többjegyű számok osztása esetén meg kell érteniük, mit is jelent az osztás, hogyan végezhető el logikus gondolkodás és következtetések útján.

Az osztás tanításánál fontos, hogy ne keverjük, ne mossuk össze az osztás két értelmezését, a részekre osztást és a bennfoglalást (lásd a 6. fejezetet is). Az írásbeli osztás mindkét módon értelmezhető, a konkrét számoktól függően azonban vagy egyik, vagy másik a célravezetőbb. Például az 1920:48 feladat inkább bennfoglalásként értelmezhető („1920-ban a 48": Hányszor van meg a 48 az 1920-ban? Hány 48-as csoportot alkothatunk 1920 elemből?), míg például az 1920:4 feladat inkább részekre osztásként („1920 osztva 4-gyel": Hány elem van egy csoportban, ha 1920 elemet 4-felé osztunk? Mennyi 1920 negyedrésze?). Az írásbeli osztás tanítása során gyakran találkozunk azzal a kérdéssel, hogy hogyan érdemes felbontani az osztandót. A diákoknak otthonosan kell mozogniuk mindkét értelmezésben, hogy megfelelő döntéseket tudjanak hozni.

Ebben a fejezetben néhány gyakorlat Sharma professzor munkáin alapul,[1] az ő módszerével közelíti meg a formalizált osztási algoritmust, egyjegyű osztó esetén. Módszerét magam is sikerrel alkalmazom mindenféle korú diáknál.

A többjegyű számmal való osztás még problematikusabb. A mentális folyamatokat nagyon fontos összekötni az írásbeli eljárásokkal, de a fejlődés egyik szintről a másikra egyáltalán nem magától értetődő.[2] A 9. gyakorlatban bemutatom a területi modell és a többjegyű számmal való osztás összekapcsolásának egy módját, amely hozzájárulhat az írásbeli algoritmus megértéséhez.

* Itt és a következő bekezdésekben a szerző a brit előírásokat kritizálja, nálunk pl. nincs ismételt kivonás. (A ford. megjegyzése)

Az írásbeli osztáshoz vezető gyakorlatok

1. gyakorlat:	A területi modellel végzett korábbi szorzások és osztások átismétlése. Az osztás mint a szorzás megfordítása.
2. gyakorlat:	A diákok saját szavaikkal mondják el, mit értenek a szorzás és az osztás kapcsolatán.
3. gyakorlat:	Egy egyszerű osztási probléma kérdés–felelet formában feldolgozva, az osztás során alkalmazandó következtetések megvilágítására.
4. gyakorlat:	Az előző gyakorlat kiterjesztése az egyszerű szorzótáblán túlra, de tízesek bontása nélkül.
5. gyakorlat:	Az előzőek folytatása, de már tízesek bontásával.
6. gyakorlat:	Az írásbeli osztás jelöléseinek bevezetése konkrét példákban.
7. gyakorlat:	Az osztás modellezése rajzolt ábrákkal.
8. gyakorlat:	A maradék kezelése.
9. gyakorlat:	Osztás többjegyű számmal.

Az osztás területi modelljétől a sztenderd írásos algoritmusig

Az első gyakorlat előtt

Bizonyosodjunk meg róla, hogy a diákok rendelkeznek a szükséges előismeretekkel, és világosan értik a szorzás területi modelljét, illetve azt, hogyan kötődik ez az osztáshoz. Az 5. fejezetben az előismereteket, a 6. fejezetben a modell lépésről lépésre történő megtanítását tárgyaltuk részletesen.

1. gyakorlat

A területi modellel végzett korábbi szorzások és osztások átismétlése. Az osztás mint a szorzás megfordítása.

Színes rudakból (például 8 fekete és 7 bordó rúdból) építsünk fel két egyforma téglalapot, a 7·8, illetve a 8·7 szorzást szemléltetve. A diákok olvassák ki a téglalapokból a megfelelő szorzást (megállapodás szerint a vízszintes oldalt nevezzék meg először, ahogyan azt a 6. fejezet 4. gyakorlatában bevezettük), a téglalap területét pedig a szorzás eredményeként kezeljék. Ezután 90°-kal forgassák el a téglalapokat, hogy lássák, a megnevezés felcserélhető (a szorzás kommutatív). A szorzat meghatározásakor ne hetesével vagy nyolcasával számoljanak, hanem induljanak ki az 5·8 (vagy 8·5) csomóponti szorzatból, amihez két nyolcas lépést (azaz 16-ot) kell hozzáadniuk.

Ezután ugyanebből a két téglalapból olvassanak ki (bennfoglaló) osztást, a következő manuális tevékenység kíséretében. Tenyerükkel simítsák végig a téglalap felületét, megnevezve az osztandót. Az ujjukkal mutassák meg, mi az osztó, a bennfoglalandó szám (a vízszintes él mérete), és hol olvasható le a hányados (a függőleges élen). Részekre osztás esetén a szerep fordított: az osztó, vagyis a részek száma a függőleges él mérete, és a hányados, vagyis az egy rész nagysága a vízszintes élé.

2. gyakorlat

A diákok saját szavaikkal mondják el, mit értenek a szorzás és az osztás kapcsolatán.

Mostanra a diákoknak már érteniük kell, hogy a szorzás olyan eljárás, amelyben egyenlő létszámú csoportokból építünk fel egy számot, az osztás pedig olyan, amelyben a számot szétbontjuk egyenlő létszámú csoportokra. Reményeink szerint azt is értik, hogy az osztás szintén tekinthető egy szám adott létszámú csoportokból való *felépítés*ének, csakúgy, mint a szorzás. Az egyetlen különbség, hogy mire keressük a választ: egy szorzási kérdésre a válasz a csoportok *összlétszáma*, az osztási kérdésre pedig (bennfoglalás esetén) a csoportok *darabszáma*, illetve (részekre osztás esetén) az egyes csoportok *létszáma*.

Mutassuk meg a diákoknak, hogy egy téglalap (vagy elemek téglalap formájú elrendezése) tökéletesen modellezi az osztást, mégpedig mindkét értelmezését egyszerre (lásd a 6. fejezet 12. gyakorlatát). Mindezeket a diákoknak saját szavaikkal megfogalmazva vissza kell tudniuk mondani, és tudniuk kell illusztrálni színes rudakból felépített vagy papíron lerajzolt téglalapokkal.

3. gyakorlat

Egy egyszerű osztási probléma kérdés–felelet formában feldolgozva, az osztás során alkalmazandó következtetések megvilágítására.

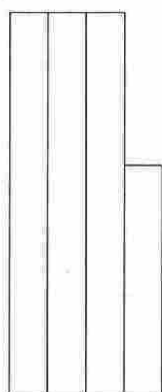
A 36:3 példáján bemutatjuk, milyen kérdések feltevésével járhatjuk körül a problémát (most „részekre osztás", nem pedig „bennfoglalás" értelmezésben).

- *Mi az a szám, amit el kell osztanod?* [Válasz: 36.]
- *Tehát melyik számmal kezded a művelet végrehajtását?* [Válasz: 36-tal.]
- *Hogy néz ki a 36 rudakból kirakva?* [A diáknak a legegyszerűbb módon három narancssárga és egy lila rudat kell kiraknia.]
- *Mit kell most tennünk a 36-tal?* [Válasz: Fel kell osztani három részre.]
- *Milyen formában kellene kiraknunk a 36-ot, hogy megtaláljuk, mekkorák ezek a részek?* [Válasz: Téglalap formában, amely három egység magas.]
- *A 30-cal vagy a 6-tal kezdjük? A nagyobb vagy kisebb rudakkal?* [Válasz: 30-cal, a nagyobbakkal.]
- *Ha van 3 narancssárga rudad, el tudod őket helyezni 3 egység magas téglalap formába anélkül, hogy bármelyiket fel kellene bontanod?* [A diák próbálja ki az elrendezést maga előtt az asztalon. Válasz: Igen.]
- *Milyen ez a téglalap?* [Válasz: Egy narancssárga téglalap, 10 egység széles, 3 egység magas.]
- *A kérdezett 36-ból mennyit raktunk már le téglalap formába?* [Válasz: 30-at.]
- *Mennyi maradt még?* [Válasz: 6.]
- *Mit kell tennünk a lila rúddal?* [Válasz: Át kell alakítani 3 egység magas téglalappá, hogy hozzá tudjuk csatolni az előző téglalaphoz.]
- *Alkalmas-e erre így magában, vagy előbb fel kell bontanunk?* [Válasz: Magában nem alkalmas, fel kell bontani kisebb rudakra.]

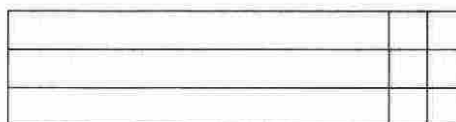
(Folytatódik)

(Folytatás)

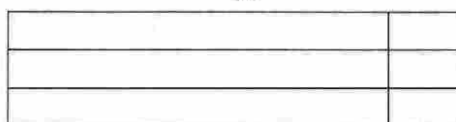
- *Hogyan kell felbontani?* [A diáknak három lehetősége van: 6 fehér kockára (1-esekre) bont, 3 rózsaszínre (2-esekre), vagy két világoskékre (3-asokra).]
- *Mondd el, miért így bontottad fel! Helyezd is el őket a téglalapba!* [Válasz: Egyesekre bontottam fel, és ezeket kirakom a narancssárga rudak folytatásaként. Vagy: A 6-ot három részre bontottam, ezek a kettesek, leteszem őket a narancssárga rudak folytatásaként. Vagy: Hármasokra bontottam, ezekből két darab kellett, leteszem őket a téglalap végéhez, a narancssárga rudakhoz képest keresztben.]
- *Végeztünk? A kérdezett 36 teljesen téglalap formába van rendezve?* [Válasz: Igen.]
- *Hányféle színű ez a téglalap?* [Válasz: Kétféle: narancssárga és fehér/rózsaszín/világoskék. (Attól függően, hogyan bontotta fel a diák a 6-ot.)]
- *Az osztandó melyik, mekkora részét mutatja a narancssárga szín?* [Válasz: A tízeseket, azaz 30-at.]
- *Az osztandó melyik, mekkora részét mutatja a másik szín?* [Válasz: Az egyeseket, azaz 6-ot.]
- *Mekkorák a téglalap oldalai?* [Válasz: 12 egység széles és 3 egység magas.]
- *Melyik számot kellett elosztanunk?* [Válasz: 36-ot.]
- *A kapott téglalap területe 36?* [Válasz: Igen.]
- *Melyik szám volt az osztó?* [Válasz: 3.]
- *Ennek a téglalapnak 3 egységnyi a magassága?* [Válasz: Igen.]
- *Tehát hol tudjuk leolvasni a választ a 36:3 kérdésre?* [Válasz: A téglalap szélessége mentén.]
- *Milyen széles ez a téglalap?* [Válasz: 12 egységnyi.]
- *Hogyan épül fel ez a 12?* [Válasz: Egy tízesből és két egyesből.]
- *Tehát hogyan olvasod ki a téglalapból az osztást és az eredményt?* [Válasz: 36:3=12.]



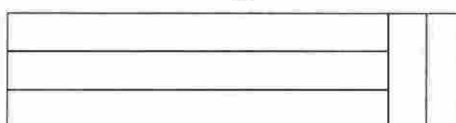
36



vagy



vagy



32:3=12

Ez a kérdéssorozat nagyon gondosan van megfogalmazva. Úgy ösztönöz és terel a helyes irányba, hogy közben a diák végig azt érezheti, egyedül oldja meg a feladatot.

4. gyakorlat

Az előző gyakorlat kiterjesztése az egyszerű szorzótáblán túlra, de tízesek bontása nélkül.

Kezdetben olyan feladatokat adjunk, amelyek csak kis mértékben „nyúlnak túl" a szorzótáblán (vagyis 10-nél nagyobb a keletkező hányados), és nem igénylik a tízesek bontását; például: 48:4, 77:7, 26:2. Később még nagyobb osztandókat adjunk (a hányados már jóval túl lehet 10-en), de még mindig ne kelljen a tízeseket bontani; például: 62:2, 69:3, 84:4, 105:5 (a 105-öt tíz narancssárga és egy sárga rúdból építsük fel). Mindegyik esetben sok irányító kérdést tegyünk fel, úgy, mint az előző gyakorlatban. Ezek rávezetik a diákot az írásbeli osztás során követendő gondolkodásmódra. A módszer az eredmény kiszámolása során a logika és a következtetések használatára neveli a diákot, nem pedig egy algoritmus elvont lépéseinek memorizálására és mechanikus alkalmazására.

5. gyakorlat

Az előzőek folytatása, de már tízesek bontásával.

Néhány ilyen jellegű feladat: 64:4, 51:3, 56:2, 84:7, 72:6, 75:5.

Ugyanazt a kérdezési technikát alkalmazzuk, mint a 3. gyakorlat során, így a diákot következtetések során át vezessük el a megoldáshoz. Példaként nézzük a 92:4 műveletet.

- *Mi az a szám, amit el kell osztanod?* [Válasz: 92.]
- *Hogy néz ki a 92 rudakból kirakva?* [A diáknak a legegyszerűbb módon kilenc narancssárga és egy rózsaszín rudat kell kiraknia.]
- *Mit kell most tennünk a 92-vel?* [Válasz: Fel kell osztanunk négy részre.]
- *Tehát egy téglalapot építesz. Tudod már valamelyik oldaláról, hogy milyen hosszú?* [Válasz: Igen, négy egység magas lesz.]
- *A 90-nel vagy a 2-vel kezdjük? A nagyobb vagy a kisebb rudakkal?* [Válasz: 90-nel, a nagyobbakkal.]
- *Ha van kilenc narancssárga rudad, ki tudsz rakni belőlük egy 4 egység magas téglalap formát anélkül, hogy bármelyiket fel kellene bontanod?* [A diák próbálja ki az elrendezést maga előtt az asztalon. Válasz: Igen.]
- *Minden narancssárga rudat felhasználtál a téglalaphoz?* [Válasz: Nem, egy kimaradt.]
- *Milyen ez a téglalap?* [Válasz: Narancssárga téglalap, 20 egység széles, 4 egység magas.]
- *A kérdezett 92-ből mennyit raktunk már le téglalap formába?* [Válasz: 80-at.]
- *Mennyi maradt még?* [Válasz: 12.]
- *Hol van ez a 12?* [A diák rámutat a kimaradt narancssárga rúdra és a rózsaszínre.]
- *Ez a 12 azért maradt ki, mert nem illeszkednek a kívánt téglalap alakba. Mit kell tennünk most?* [Válasz: Fel kell bontani kisebb rudakra, amelyek már megfelelő hosszúak.]
- *Hogyan kell felbontanunk a 12-t?* [A diáknak több lehetősége van. A 12 fehér kockára (1-esekre) bontásról inkább beszéljük le, mert ez a módszer nagyobb számok esetén egyre használhatatlanabb lesz. Bonthat még négy világoskék rúdra (3-asokra) vagy három pirosra (4-esekre).]

(Folytatódik)

- *Mondd el, miért így bontottad fel! Helyezd is el őket a téglalapba!* [Válasz: Egyesekre bontottam fel, és kirakom ezeket a narancssárga rudak folytatásaként. (Ha ezt teszi, kérdezzük meg, nem talál-e hatékonyabb bontási módot, amellyel ugyanígy le tudna rakni egy négy egység magas téglalapot. A bizonytalan diákot inkább a bennfoglaló, mint a részekre osztás felé irányítsuk: bontsa négyesekre a 12-t. Ezzel a későbbi, maradékos osztást is előkészítjük.) Vagy: A 12-t négy részre bontottam, ezek a hármasok, leteszem őket a narancssárga rudak folytatásaként. Vagy: négyesekre bontottam, ezekből három darab kellett, leteszem őket a téglalap végéhez, a narancssárga rudakhoz képest keresztben.]
- *Végeztünk? A kérdezett 92 teljesen téglalap formába van rendezve?* [Válasz: Igen.]
- *Hányféle színű ez a téglalap?* [Válasz: Kétféle: narancssárga és fehér/világoskék/piros. (Attól függően, hogyan bontotta fel a diák a 12-t.)]
- *Az osztandó melyik, mekkora részét mutatja a narancssárga szín?* [Válasz: A tízesek nagy részét, azaz 80-at az eredeti 90-ből.]
- *Az osztandó melyik, mekkora részét mutatja a másik szín?* [Válasz: A maradék 12-t.]
- *Mekkorák a téglalap oldalai?* [Válasz: 23 egység széles és 4 egység magas.]
- *Melyik számot kellett elosztanunk?* [Válasz: 92-t.]
- *A kapott téglalap területe 92?* [Válasz: Igen, mert 80+12=92.]
- *Melyik szám volt az osztó?* [Válasz: 4.]
- *Ennek a téglalapnak 4 egységnyi a magassága?* [Válasz: Igen.]
- *Tehát hol tudjuk leolvasni a választ a 92:4 kérdésre?* [Válasz: A téglalap szélessége mentén.]
- *Milyen széles ez a téglalap?* [Válasz: 23 egységnyi.]
- *Hogyan épül fel ez a 23?* [Válasz: Két tízesből és három egyesből.]
- *Ki tudod olvasni tehát a téglalapból az osztást és az eredményt?* [Válasz: 92:4=23.]

92:4=23

6. gyakorlat

Az írásbeli osztás jelöléseinek bevezetése konkrét példákban.

Az előző gyakorlatban leírtak szerint haladva mutassuk be, hogyan jelennek meg az egyes lépések az írásbeli osztás jelöléseiben.* Az osztandó egy téglalap területeként jelenik meg. Mivel így jobban illeszkedik a jelöléshez, már most szögezzük le: az osztó a téglalap magasságaként jelenik meg (így köthető a színes rudakkal végzett munkához). Például a 60:5 osztás jelölése felidézi a téglalapba írt terület-mérőszámot és a jobb oldalra írt magasság-mérőszámot (lásd az ábrát). A hányados a téglalap vízszintes oldalának hossza lesz.

(Folytatódik)

* Az írásbeli osztást is teljesen másként, a területi modellhez, a téglalapos ábrához jobban illeszkedő módon és jelöléssel végzik Angliában. Tehát a 6. és a többi kapcsolódó gyakorlat ismét átírás, nem egyszerű fordítás. Lásd még a 112. oldal lábjegyzetét. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

60	5	60:5

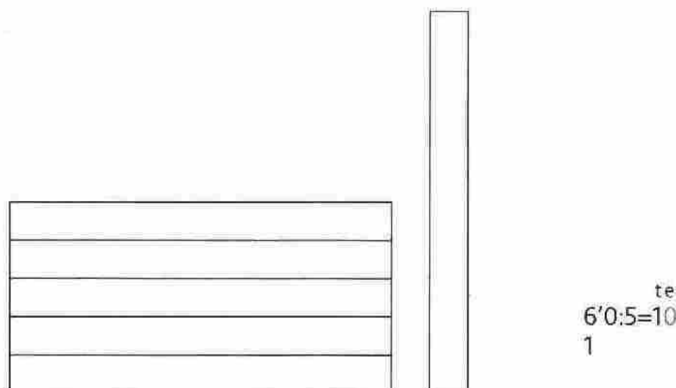
Az írásbeli osztás jelölése összekapcsolható a területi modellel.

A feladat kidolgozása a következő lépésekben történhet.

1. lépés: Írjuk fel a 60:5 („hatvan osztva öttel") feladatot, és mutassuk meg az előző bekezdés szerint, hogyan kapcsolódik ez jelölésben az osztás területi modelljének vázlatos téglalapjához.

2. lépés: A diákok rakják ki a 60-at rudakból. Ennek legegyszerűbb módja hat narancssárga rúd. Alkossanak ebből egy öt egység magas téglalapot anélkül, hogy bármelyik tízest felbontanák. Ekkor öt rudat egymás alá helyezve kapnak egy téglalapot. (Ez természetesen az osztás „részekre osztó" értelmezése. Ha „60-ban hányszor van meg az 5?" módon, bennfoglalásként tesszük fel a kérdést, akkor mindegyik rudat sárga ötösökre kellene felbontani, ami igen nehézkes volna.) Kérdezzük meg, milyen széles ez a téglalap, amelyet a hat narancssárga rúd közül ötből építettek fel. A válasz: 10, azaz egy tízes. Jelöljük a hat mellett, felül egy vesszővel, hogy a hat darab tízest bontottuk fel elsőként. Írjuk le az egy tízest az írásbeli osztás eredményének első számjegyeként (6'0 : 5 = 1). Ha szükséges, az eredmény helyiértékeit a „tízesek" és „egyesek" kezdőbetűivel jelöljük a számok felett. Néhány diákot biztosan megzavar a „tíz" és az „egy tízes" különbsége. A kedvükért első lépésben kiírhatjuk magát a 10-et hányadosként, halvány 0-val (6'0:5=10), amit később majd felülírunk egy másik számjeggyel.

<u>Példa:</u> 60:5



3. lépés: Kérdezzünk rá, hány rúd maradt ki az osztásból, azaz a téglalap formába rendezésből. A válasz: egy tízes rúd, amelynek értéke 10. Ez kiváló alkalom, hogy rámutassunk a „tíz" és az „egy tízes" azonosságára, hiszen a narancssárga rúd a maga fizikai valójában jelen van. (Lásd az előző lépésben említett zavar lehetőségét.) Fontos, hogy erre a rúdra bátran használjuk a „kimaradt" vagy „maradék" szavakat, hiszen ezt fogjuk használni az írásbeli osztás során is. Az 1 maradékot leírjuk az osztásban a 6-os alá, jelezve, hogy a 6 tízes rúdból 1 maradt ki a téglalappá alakítás során. Ezt nem lehet másként elhelyezni a kívánt (5 egység magas) téglalapban, csak úgy, hogy előbb fel kell bontanunk kisebb részekre. Újabb vesszővel jelezzük az osztandóban a 0 mellett, fent, hogy ezt a számjegyet „levesszük", hozzáírjuk a maradék tízes helyiértékű 1-es számjegyéhez. Így a maradék (a még felosztandó mennyiség) valódi értékében, 10-ként jelenik meg az osztandó alatti sorban.

(Folytatódik)

(Folytatás)

Az eddigi lépéseket, tartalmukat hangsúlyosan fogalmazzuk meg újra: *A 60-as számmal kezdtünk. Elővettetek hat rudat, amelyekből 5 egység magas téglalapot építettetek, mert 5-tel kell osztanunk a 60-at. Bontás nélkül 5 tízes rudat tudtatok ilyen téglalapba rendezni, ennek a szélessége 10 egység, és kimaradt még 1 tízes rúd. Az írásbeli műveletben ezeket úgy jelöltük, hogy a hányados első (tízes nagyságrendű) számjegye 1, és a maradék is 1. Ezt az osztandó egyes helyiértékű jegyével – most a 0-val – kiegészítve látjuk, hogy a maradék valódi értéke 10. Ezt fel kell bontanunk, hogy a téglalapot ki tudjuk egészíteni vele.*

A diákok mondják vissza mindezt, és közben a megfelelő pontokon mutassanak rá a rudakra, illetve az írásbeli lejegyzésre.

4. lépés: Kérdezzük meg a diákokat, hogyan szándékoznak felbontani a maradék 10-et, hogy a kapott kisebb elemekből 5 egység magas téglalapot hozhassunk létre, kiegészítve a már meglévőt. Többféle választ is adhatnak: bonthatják a 10-et csupa egyesekre (fehér kockákra), és kirakhatják ezeket a narancssárga rudak folytatásaként (ami nem túl szerencsés módszer, különösen nagyobb maradékok esetén – erre hívjuk is fel a figyelmüket); vagy bonthatják öt darab rózsaszín rúdra (ezek kettesek), letéve őket a narancssárga rudak folytatásaként; vagy bonthatják két darab sárga rúdra (ezek ötösök), letéve őket a téglalap végéhez, a narancssárga rudakhoz képest keresztben. (Ez utóbbi az osztás bennfoglaló értelmezését hozza be a képbe. A precíz és következetes értelmezés érdekében próbáljuk a középső változat felé terelni a diákokat.) Az így (bármelyik módon) kiegészített téglalap tehát már a teljes 60-as számot 5 egység magas alakzatba rendezve tartalmazza, a szélessége pedig 12 egység. Ezt az írásbeli lejegyzésben is jelöljük: a hányados korábbi, tízes helyiértékű 1-es számjegye mellé (ha ott volt korábban a szürke 0, annak helyébe) írjuk le az egyes helyiértékű 2-es számjegyet (ami megmutatja, hogy az előző lépésbeli 10-es maradék most 2 egység széles új részként egészíti ki a korábbi téglalapot). Egyúttal írjunk az előző, 10-es maradék alá új sorba a 0-t – jelezve, hogy most már nem maradt (ki) semmi a téglalappá alakításból. Vagyis a 60:5 művelet végeredménye, hányadosa 12, ami a teljes téglalap szélessége.

Példa: 60:5

vagy

vagy

```
   t e
6'0':5=12
1 0
  0
```

Néhány további példában a diákok gyakorolják párhuzamosan a rudakkal való manipulálást és a művelet írásbeli lejegyzését. Ezután csak írásban, rudak használata nélkül oldjanak meg néhány hasonló feladatot (előbb a tanár elővezetésében, azután önállóan). Viszonylag kis számokat tartalmazó példákat adjunk fel, hogy a diákok az új jelölésre és a mögötte meghúzódó tartalomra koncentrálhassanak, és ne nehezítsük meg a dolgukat bonyolult bontásokkal.

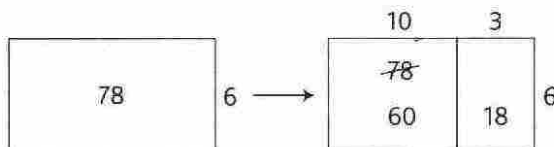
7. gyakorlat

Az osztás modellezése rajzolt ábrákkal.

A rajzolós-ábrázolós szint nagyon fontos átmeneti állomás a konkrét, szemléltetőeszközökkel végzett manipulatív tevékenység és az absztrakt, papíron végzett munka között. A szorzótáblából ismert számokra vonatkozóan ezt a módszert már tárgyaltuk a 6. fejezetben.

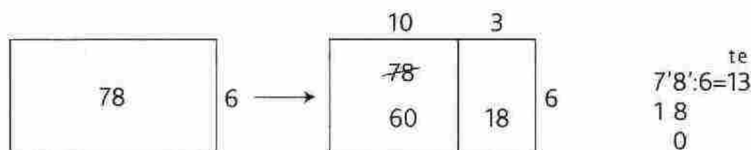
A téglalap-vázlatos modellt osztás esetén a következőképpen vezethetjük be: *Lássuk a 78:6 példáját. Ehhez egy 78 egység területű téglalapot kell rajzolnunk, amely 6 egység magas. Rajzoljunk egy téglalapot, írjuk bele területként a 78-at, magasságaként pedig jelöljük a jobb oldalon a 6-ot. Kezdjük a nagyobb helyiértékkel, azaz a 7 tízessel. Osszuk fel a téglalapot két mezőre, amelyek közül a nagyobbik lefedhető csupa tízes rúddal, azaz a szélessége 10 egység, 1 tízes. Írjuk ezt a felső oldalára. Mivel ez a mező 6 egység magas, a területe 60 egység. A másik mező területe tehát 78–60=18 egység. Mivel ez is 6 egység magas, a szélessége 3 egységnyi. Írjuk ezt a felső oldalára. Mivel így a teljes téglalap szélessége 13 egység, a válasz 78:6=13.*

Példa: 78:6



A feladat fentiek szerinti kidolgozása világosan kapcsolódik a szorzás rekesz-módszerrel való megoldásához, amelyet a diákok már megtanultak és begyakoroltak az előző, 7. fejezet során.

Gyakoroljuk a téglalap-vázlatos módszert több hasonló feladatban, kétjegyű számokat egyjegyűekkel osztva, és az ábrázolással párhuzamosan az írásbeli lejegyzést is elvégezve. Gyakoroljunk annyit, amennyit a diákok igényelnek az ábrás és a sztenderd írásos megoldás közti kapcsolat megértéséhez.



8. gyakorlat

A maradék kezelése.

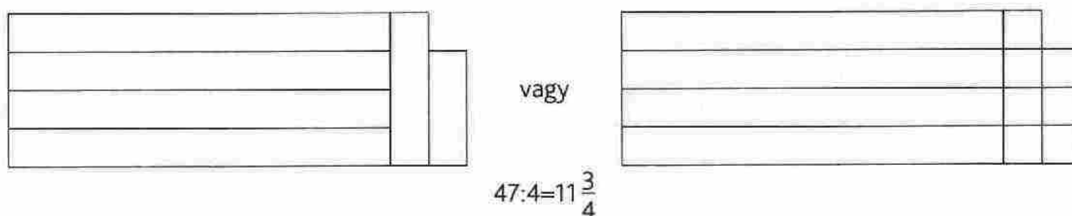
Ez a gyakorlat az előző folytatása, addig azonban nem érdemes próbálkozni vele, amíg a diákok nem értik és kezelik pontosan a maradék nélküli osztást. Tisztában kell lenniük a „maradék" fogalmával is, mint az osztás valamelyik lépésében megmaradó, ott fel nem használható mennyiséggel. A maradékról már szóltunk a 6. fejezetben (a 15. gyakorlatban, az osztás bennfoglaló értelmezése kapcsán).

(Folytatódik)

(Folytatás)

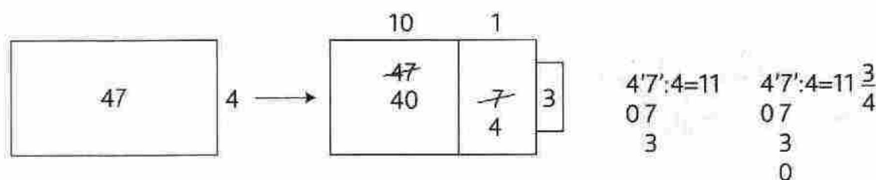
Indulásként szemléltetőeszközökkel oldjunk meg olyan osztási feladatokat, amelyekhez hasonlókat már megoldottunk, de az osztandó most legyen kicsivel nagyobb, hogy keletkezzék maradék. Végighaladva a tanult eljáráson, a diákok azt tapasztalják, hogy nem tudják a kívánt téglalapba szervezni a teljes kiinduló mennyiséget, az osztandót, mert valahány, valamekkora rúd kimarad a végén. Ezeket a rudakat (vagy rudat) a téglalap jobb oldalához illesztve helyezzük el, jelezve, hogy egy új oszlop kezdődik, amely nem ér végig a téglalap magasságán. Például, a 47:4 osztásban a négy narancssárga rudat négy sorban egymás alá rendezzük, a fekete rudat pedig fel kell bontanunk (hét kis fehér kockára vagy egy-egy piros és világoskék rúdra).

A teljes téglalap végső szélessége mindegyik bontás esetén 11 egység, de az is látszik, hogy van maradék, vagyis olyan mennyiség, amely nem tölt ki egy újabb, 4 egység magas oszlopot. Esetünkben ez a maradék 3. Az is azonnal látszik, hogy ez tekinthető 3 egységnek a szükséges 4 közül, amely teljes oszlopot alkotna. Ez a „három a négy közül" nevezhető „három negyednek" is, és írható törtként: $\frac{3}{4}$.



Ugyanezt a feladatot oldjuk meg írásban, az absztrakt algoritmus segítségével is. Levesszük az első jegyet, a 4-est (valódi értékén: 40-et). Ezt négy részre osztva (vagy bennfoglalásként: megkeresve, hányszor van meg benne a 4) azt kapjuk, hogy a hányados tíz (azaz 1 tízes), és nincs maradék. Ezért a 7 egyest kell 4-gyel osztani (vagy: megkeresni, hányszor van meg benne a 4). 1-szer megvan, ezt leírjuk a hányados egyeseinek helyiértékére, és a 3-as maradékot is jelöljük. Ha maradékos osztást végzünk, itt vége az eljárásnak. Ha tovább osztunk, az egész hányadoson túl keletkezik még egy tört is, a $\frac{3}{4}$. A tört két száma, két szintje közti vonalat, a törtvonalat értelmezhetjük osztási műveletként is.

<u>Példa:</u> 47:4



9. gyakorlat

Osztás többjegyű számmal.

Az eddigi feladatokban többjegyű számokat osztottunk egyjegyűvel. Ha az osztó is többjegyű szám, az eljárás nehezebb, mert nem elég egyszerűen a szorzótáblát használni. Becslésre, az erre való képességre van szükség, továbbá váltogatva többjegyűek szorzására és kivonásra is. A többjegyű számmal való osztás a matematikai nehézséggel küzdő diákok számára valóságos rémálom: a kivonás eleve nehézséget okoz nekik, általában gyenge a becslési képességük, és ehhez még memóriaproblémák is társulnak – végeredményben szinte képtelenek megjegyezni egy ilyen összetett algoritmus egymást követő lépéseit.

Én a saját gyakorlatomban megengedem nekik, hogy az ilyen osztásokat számológéppel végezzék. Ha mégis meg kell tanulniuk az eljárást papíron, ceruzával, akkor javaslom, hogy kerüljük el a mechanikus bebiflázást, és az eljárás alapos elemzésével mutassuk be minden egyes lépés működési módját és célját. Ezt a vázlatos ábrák és a formalizált írásbeli eljárás párhuzamos használatával érhetjük el, oda-vissza mozogva a kétféle eljárás között minden egyes lépés során – ahogyan azt a diákok korábban, az egyszerűbb osztások során már megismerték és gyakorolták.

A becslés problémája is kivédhető, ha az osztóhoz kidolgozunk egy vázlatos szorzótáblát, mielőtt hozzáfognánk magához az osztáshoz. Ez talán időigényes, de a diákok általában üdvözlik az ötletet, mert segítséget nyújt nekik, és a befektetés is megtérül. Minden lépés hasonlóan számolható, mint a korábbi műveletek során, a szorzótábla is éppen úgy használható. A lépésenként történő lejegyzés a rövidebb, egyjegyű számmal való osztáshoz teszi hasonlóvá az eljárást.

Nézzünk egy konkrét feladatot, például a 784:16 műveletet. A megoldás során egyértelmű lesz a kapcsolódás a területi modellen alapuló, ábrás megoldási mód és a bevett írásos algoritmus között. Az érthetőség kedvéért minden lépést részletesen leírunk. Célszerű az olvasással párhuzamosan rögtön végre is hajtani az instrukciókat.

1. lépés: Készítsünk egy vázlatos 16-os szorzótáblát a lap szélén. Három csomóponti szorzatot írjunk bele: 16·1, 16·10 és 16·5 (az utolsót az előző feleként kapjuk meg).

784:16	16-os szorzótábla 16·1= 16 ·2 ·3 ·4 ·5= 80 ·6 ·7 ·8 ·9 ·10=160

2. lépés: Készítsünk egy vázlatos téglalapot, amely az osztási feladatot jelzi. A magassága legyen az osztónak megfelelően 16 egység, jelöljük. A teljes területet, a 784 egységet osszuk két mezőre. Átmenetileg jelöljön a bal oldali mező (rekesz) 780, a jobb oldali 4 egységet. Ezt írjuk is beléjük, de hagyjunk elegendő helyet a számok alatt a későbbi változtatásokhoz. Az eljárás során ugyanis szükség lehet a terület újraosztására és újracímkézésére.

(Folytatódik)

(Folytatás)

784:16

780	4

16

16-os szorzótábla
16·1= 16
·2
·3
·4
·5= 80
·6
·7
·8
·9
·10=160

3. lépés: Először a nagyobb helyiértékű számra, vagyis a nagyobb területű mezőre koncentráljunk. A hét darab százast nem lehet 16 egység magas téglalapba szervezni. Tekintsük a 780-at 78 tízesnek. A vázlatos szorzótáblán látjuk, hogy 16·5 több, mint 78, de 16-nál kevesebbel több. Így a 16·4 az a legnagyobb szorzat, amely még „belefér" a 78-ba. Ezt ki kell számolnunk (például egy 16-os lépést téve visszafelé a 16·5=80 -ból, vagy a 16 kettőzése és ismételt kettőzése révén). A 64-es eredményt írjuk bele a szorzótáblába, hátha később szükség lesz rá. Most valójában a 78 *tízes* közül állítottunk elő 64 *tízest* 16-szor 4 *tízesként*. Változtassuk meg a bal oldali mező területét: jelezzen 640 egységet, így a szélessége 40 egységnyi. Ezeket írjuk is a megfelelő helyekre. Azt a 140 egységet, amivel csökkentettük a bal oldali rekesz területét, adjuk hozzá a jobb oldaliéhoz, így annak területe 4+140=144 egységnyi lesz. Jelöljük.

784:16

40

16	~~780~~ 640	~~4+140~~ 144

16-os szorzótábla
16·1= 16
·2
·3
·4= 64
·5= 80
·6
·7
·8
·9
·10=160

4. lépés: Az eddigi lépéseket jelöljük az írásbeli osztásban is. Írjuk fel a feladatot: 784:16. (Ha szükséges, az osztandó számjegyei fölé eleinte kiírhatjuk a helyiértékek kezdőbetűit: sz, t, e. Ezt később elhagyhatjuk, sőt, előbb-utóbb el is kell hagyni.) Jelöljük kis felső vesszővel, hogy előbb a 78-at osztjuk 16-tal. A vázlatos szorzótáblán látható, hogy a 78-hoz alulról legközelebbi szorzat a 16·4=64. Vagyis a 78-ban a 16 megvan 4-szer, és marad még 78–64=14. Leírjuk a 4-est (valójában 4 *tízest*, hiszen a 780-at osztottuk 16-tal) a hányados első jegyeként. (Ha szükséges, itt is jelölhetjük a helyiértékeket kezdőbetűkkel, és kiírhatjuk halványan a 0-t.) A 78 alá leírjuk a 14-es maradékot (valójában: 780 alá 140-et). Levesszük az osztandó következő (utolsó) számjegyét (kis vesszővel jelölve); így összesen 144 egység vár még osztásra.

(Folytatódik)

(Folytatás)

784:16

sz t e t e
7 8'4':1 6=40
1 4 4

40

~~780~~	~~4+140~~	
640	144	16

16-os szorzótábla
16·1= 16
·2
·3
·4= 64
·5= 80
·6
·7
·8
·9
·10=160

5. lépés: Visszatérünk az ábrához, azon belül is a 144 egység területű jobb oldali mezőhöz, a maradékhoz. A vázlatos szorzótábla megmutatja, hogy a 144 valahol a felső vége közelében lehet. Szerencsénk van: a 16·10=160 -ból egy 16-os lépést téve visszafelé éppen 144-et kapunk, vagyis 144=16·9. (Ha valamelyik diák tévesen 16·8-nak becsüli a keresett számot, és például a már meglévő 16·4=64 kettőzésével számolja ki, egy további lépéssel, egy 16-os hozzáadásával hosszabb úton jut el a célhoz. Ez sem katasztrófa, a duplázás gyakorlására és tapasztalatszerzésre jó. Az ilyen lépések a becslési képességet is javíthatják.) Most már megjelölhetjük a második rekesz 9-es szélességét is.

784:16

sz t e t e
7 8'4':1 6=40
1 4 4

40	9	
~~780~~	~~4+140~~	
640	144	16

16-os szorzótábla
16·1= 16
·2
·3
·4= 64
·5= 80
·6
·7
·8
·9=144
·10=160

6. lépés: Visszatérünk az írásbeli szorzáshoz: 144-et kell osztani 16-tal. Már tudjuk, hogy a válasz 9, leírjuk a hányados egyeseinek (az esetleg ott lévő halvány 0) helyére. A második osztás során nem keletkezett maradék; ezt is jelöljük.

784:16

sz t e t e
7 8'4':1 6=4 9
1 4 4
0

40	9	
~~780~~	~~4+140~~	
640	144	16

16-os szorzótábla
16·1= 16
·2
·3
·4= 64
·5= 80
·6
·7
·8
·9=144
·10=160

(Folytatódik)

(Folytatás)

Az egész eljárást sokszor meg kell ismételni más számokkal, amíg a diákok az algoritmus minden egyes lépésének jelentését, célját, működését megértik. Ha ezt elérték, már nem csupán érthetetlen, bebiflázott lépések sorozatát fogják reprodukálni, hanem tetszés szerint a téglalap-vázlattal vagy az írott algoritmussal, az elveket értőn alkalmazva dolgozhatnak.

Néhány további példa a fentiek gyakorlására: 345:15, 1700:25, 2415:105, 294:14, 1416:24, 6447:21, 5724:54 stb. E példák egyikében sincs maradék, és mindegyik megoldható két mezőre osztott téglalap-vázlattal. Például:

5724:54

sz t e sz t e
5 7'2'4':5 4=1 0 6
3 2
3 2 4
0

100	6	
~~5700~~ 5400	~~24+300~~ 324	54

54-es szorzótábla
54·1= 54
·2
·3
·4
·5=270
·6=324
·7
·8
·9
·10=540

Ez a módszer bepillantást enged a diákoknak az írásbeli osztás „működésébe", mégsem teljesen „problémamentes". Jól kell megbecsülni a hányados jegyeinek számát, különben nehéz felosztani a téglalapot megfelelő számú mezőre. Az osztandó megfelelő bontása szintén komoly kihívás elé állítja a diákot. Például, ha az előző ábrán bemutatott esetben az 5724-et a diák 5000+724 módon bontja fel, a számítás meglehetősen kusza és szükségtelenül bonyolult lesz.*

A fentiek egy változatát saját gyakorlatomban igen hasznosnak találtam, bármilyen életkorú diákok számára. Hasznos lehet, ha részletesen felírjuk az osztó szorzótábláját. A fenti, 5724:54 példánál maradva, a diák szinte a teljes szorzótáblát kidolgozhatja, a következőképpen: először az 1-szeres, 10-szeres, 5-szörös csomóponti szorzatokat határozza meg; azután a 2-szerest, 4-szerest, 8-szorost kettőzéssel; azután a 3-szorost és a 9-szerest a 2-szeresből és a 8-szorosból egy lépéssel előrefelé (vagy utóbbit a 10-szeresből egy visszalépéssel); a 6-szorost a 3-szoros duplázásával (vagy az 5-szörösből egy lépéssel előrefelé). Azoknak a diákoknak, akik a szorzótáblához kötődő hasonló feladatokat alaposan begyakorolták az 5. és 6. fejezet során, ez önmagában nem túl megterhelő, és nem tart sokáig. A legnehezebb, 7-szeres szorzatot ki is hagyhatjuk, hiszen kicsi az esélye, hogy éppen erre lesz szükség – ha mégis, a 6-szorosból egy lépéssel előre, vagy a 3- és 4-szeres összegeként ez is könnyen kiszámolható. A teljes vagy majdnem teljes szorzótábla birtokában a becslésnek már jóval kisebb a szerepe, könnyebben elvégezhető a művelet. A maradékok meghatározásához szükséges kivonásokat a diákok elvégezhetik külön, mellékszámításként is, akár írásbeli kivonás, akár számegyenesen való kiegészítő összeadás révén, ha ez a lépés fejben még nem megy.

(Folytatódik)

* A magyar szövegben már a nálunk használatos írásbeli módszer szerepel, ahol ez nem okoz problémát. Az eredeti angol módszer – más irányú előnyei mellett – ebben valóban hátrányban van. Az itthoni írásbeli osztás során fel sem merül, hogy hogyan, jól vagy rosszul osztja fel a gyerek az osztandót, mert az első (néhány) megfelelő számjegyet kell tekintenie, ami nem lehet „rossz". A szóban forgó konkrét példának azonban más nehézsége is van: az egy helyiérték „átugrása", a hányadosban jelentkező helyiértékpótló nulla korántsem sorolja a feladatot a kezdő, könnyű szintűek közé. (A ford. megjegyzése)

(Folytatás)

5724:54 sz t e sz t e 5 7'2'4':5 4=1 0 6 3 2 3 2 4 0	54-es szorzótábla 54·1= 54 ·2=108 ·3=162 ·4=216 ·5=270 ·6=324 ·7 ·8=432 ·9=486 ·10=540

A diák válassza a számára legmegfelelőbb, legérthetőbb módszert. Mind a téglalap-vázlat, mind a sztenderd írott algoritmus papíron rögzített, tehát ellenőrizhető, követhető munkamenetet kíván a diáktól, és mindkettő ésszerű időn belül elvezet a megoldáshoz. Ha a diák már megértette és magabiztosan alkalmazni is tudja az írásbeli osztást, a további gyakorlás erőltetésének nem látom értelmét, mert ez semmilyen mélyebb matematikai ismerethez nem vezet el, a hétköznapi gyakorlatban pedig úgyis mindenki számológéppel számol.

Mit tanítsunk ezután?

A 9. fejezetben megtanítjuk a diákot arra, hogyan okoskodjon, hogyan következtessen az osztással kapcsolatban, hogy a számokat és a számításokat a lehető legegyszerűbbé tegye.

Hivatkozások

[1] M. Sharma (various 1980–1993) *Math Notebook*, Center for Teaching & Learning of Mathematics, Framingham, MA, USA.

[2] I. Thompson (2003) 'Deconstructing the National Numeracy Strategy's approach to calculation', ch. 2 in *Enhancing Primary Mathematics Teaching*, ed. I. Thompson, Open University Press.

IV. RÉSZ

Következtetési módszerek

9. FEJEZET

Következtetési módszerek

Áttekintés

Voltaképpen az egész könyv a következtetésekről szól. Az alapvető eljárások tanítása során mindig ösztönözzük arra a diákokat, hogy ne csak bemagolják, hanem értsék is meg, mit és miért csinálnak; hogy gondolkozzanak logikusan és matematikusan. A matematika nem arról szól, hogy egy receptet követve kihozzuk a jó választ a kérdésre, és a dolgozatfüzetünk tele legyen pipával, hanem a világ megértéséről, fogalmak és elvek vizsgálatáról, összefüggések megtalálásáról, elvont gondolkodási képességeink fejlesztéséről és megerősítéséről.

Ha elfogadjuk, hogy diákjainkat elsősorban a megértésre kell tanítanunk, azt is belátjuk, hogy a fejből megtanulandó tényanyagot elég néhány kulcsfontosságú ismeretre korlátozni. A megtanulandó eljárásokat is azokra kell szűkítenünk, amelyek a legszélesebb körben alkalmazhatók. A lexikális tudásban így keletkező „lyukakat" pedig tanítsuk meg a logika használatával befoltozni, vagyis a diákok legyenek képesek már ismert dolgokból újakat levezetni. A számolási nehézségekkel küzdő felső tagozatos diákok nem fognak maguktól következtetéseket levonni, tehát célzottan meg kell tanítani őket erre.

Összefoglaló a következtetési módszerekről

1. Hiányzó számok.
2. Tíz és többszöröseinek bontásai.
3. Tízhez közeli számok bontásai.
4. Kettőzések.
5. A kettőzések következményei.
6. A 9 az majdnem 10.
7. A kivonás mint a különbség megtalálása.
8. A szorzótábla.
9. A szorzótábla további következményei.
10. A szorzás területi modelljének kiterjesztése más témákra.
11. Gondolatok az osztásról.

Következtetési módszerek

1. Hiányzó számok

Sok diák, aki minden gond nélkül válaszol a *Mennyi 5+7?* kérdésre, kudarcot vall, ha ugyanezt a problémát hiányzó tagú összeadásként, azaz *5 meg mennyi az 12?*, vagy a még nehezebb *Mennyi meg 5 az 12?* módon fogalmazzuk meg. Azoknak a diákoknak, akik végiggyakorolták a könyvünk korábbi fejezeteiben leírtakat, világosan érteniük kell a négy alapművelet és megfordításaik közti kapcsolatokat. Azoknak, akik még nem tudják összekapcsolni a gyakorlati tevékenységeket és az elvont, szimbolikus jelölésrendszert, további gyakorlásra van szükségük nem egyszerűen a feladatmegoldás, hanem a feladatok értelmezése, önálló megfogalmazása és lejegyzése terén. Úgy kell irányítani a diákokat, hogy ne pusztán mechanikus eljárásokat alkalmazzanak, hanem gondolkodjanak. Gyakorolják a következtetéseket szövegszerűen, lehetőleg hangosan. Például így: *Az a kérdés, mennyit adjak hozzá 5-höz, hogy 12-t kapjak. Tehát a 12 a két szám összege, vagyis a keresett szám kisebb 12-nél. Mennyivel kisebb? 5-tel kisebb.*

A diák maga elé képzelheti az üres számegyenest, és ekként is okoskodhat: *Az a kérdés, mennyit adjak hozzá 5-höz, hogy 12-t kapjak. Megjelölöm a számegyenesen az 5-öt, és ettől jobbra a 12-t. A keresett számot az 5 és a 12 közötti távolság adja meg a számegyenesen, vagyis a két szám különbsége, tehát amennyit ugranom kell 5-től 12-ig, átlépve a 10-et.* Ez a második módszer a kivonást kiegészítő összeadásként kezeli, amely megközelítést meggyőződésem szerint minden diáknak meg kellene tanítani. Ez a megközelítés különösen előnyös, ha negatív számok is vannak a műveletben.

Ha egy kivonásból hiányzik az egyik szám, a diák hasonlóan következtethet, szövegesen és lehetőleg hangosan. Például a □–6=15 esetében: *Miből kell 6-ot elvenni, hogy 15-öt kapjak? Ez a szám nagyobb lesz 15-nél. Mennyivel nagyobb? 6-tal nagyobb.*

2. Tíz és többszöröseinek bontásai

A diákoknak a 10-es szám ötféle lehetséges bontott alakját fejből kell tudniuk, mert ezek kulcsfontosságúak. Más egységek bontása esetén is alkalmazhatók. Például a 3+7=10 az egyesek körében érvényes bontás – de ebből következik a tízesek körében a 30+70=100, az ezresek körében a 300+700=1000, a milliósok körében a 3 millió meg 7 millió az 10 millió, a hosszadatok terén a 3 méter meg 7 méter az 10 méter, a törtek között a 3 tizenötöd meg 7 tizenötöd az 10 tizenötöd stb.

Ezekből a bontásokból levezethetők olyan összegzések is, amelyek kerek számot (10-többszöröst) adnak eredményül. Például a 3+7=10 ismerete segít a 23+7, az 583+7, az 1027+103 és hasonló összegek kiszámításában.

A tíz többszöröseiből való kivonások is könnyen elvégezhetők e bontások ismeretében. A 3+7=10 példája alapján számítható ki a 10–7, a 100–30 vagy a 10000–3000 kivonás, vagy akár az, hogy mekkora az 1 kg-nál 700 g-mal kisebb tömeg. Hiányzó tagú összeadások és kivonások szintén megoldhatók e bontások segítségével (lásd az előző következtetési módszert), például pénzváltási kérdések *(Mennyit kapok vissza 100 Ft-ból, ha 30 Ft-ért vettem nyalókát?)* vagy hosszmérési problémák *(Mennyi van még hátra az 1000 m-es futótávból, ha 700 m-t már lefutottam?).*

További összetett és elvont problémákra, területekre is kiterjeszthető az egyszerű 3+7=10 bontás, például az algebrára: $3x+7x=10x$.

3. Tízhez közeli számok bontásai

A 10 bontott alakjaiból a diákok könnyen következtethetnek a 10-hez közeli számok bontásaira. Például, ha 3+7=10, akkor ebből következik, hogy 3+8=11, 4+7=11, 3+6=9 vagy 2+7=9.

Ezt a módszert társítva az előző pontban leírt technikával, a 3+7=10 bontásból például olyan számítások is levezethetők, hogy mennyi 123+8, 1070+40 vagy 0,4+0,7.

Az előző ponthoz hasonlóan a módszer még távolabbra is kiterjeszthető: kivonásokra, hiányzó tagú összeadásokra, törtekre vagy az algebrára.

4. Kettőzések

Az egyjegyű számok (valamint a tíz) kettőzéseiből következtethetünk a nagyobb számok kettőzéseire és több, velük végzett egyéb művelet eredményére. Ha 4 duplája 8, akkor 40 duplája 80, 800–400=400, 2·4000=8000 stb. Ha y=4, akkor $2y$=8 stb.

Ha a kettőzést két egyforma tag összeadásaként fogjuk fel (4+4=8), akkor ebből olyan számítások eredménye is könnyen kikövetkeztethető, mint a 24+4, 694+4 vagy 2140+40 stb. – anélkül, hogy valóban el kellene végezni, ki kellene számolni ezeket a műveleteket.

A kettőzés ismerete a felezés alkalmazásában is segít. Ha a gyerek tudja, hogy 8+8=16, akkor azt is tudja, hogy mennyi 16 fele, mennyi 16:2, 160:2, 160:20 stb. – mégpedig konkrét számolás nélkül. Továbbá könnyen megoldhat fejben olyan feladatokat, mint például: 216–8 vagy 4160–80.

5. A kettőzések következményei

Ha a 7 duplája (azaz 7+7) az 14, akkor 7+8=15, 6+7=13, 80+70=150, 7 tizenketted meg 6 tizenketted az 13 tizenketted stb.

A továbbgondolás másik útja, hogy ha 7+7 az 14, akkor 6+8 is 14 – vagyis: bármely két, 2 különbségű szám összege a középső (kimaradó, „átugrott") szám duplája. Például 14+16 a 15 duplája, a 69+71 a 70 duplája, és így tovább.

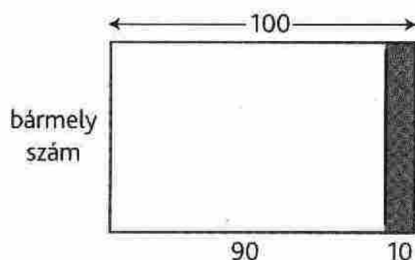
6. A 9 az majdnem 10

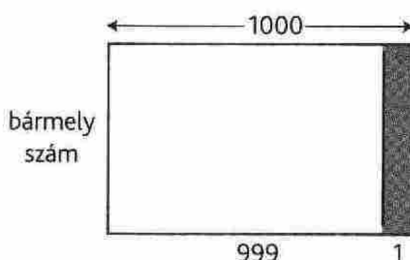
Bármely összeadást vagy kivonást, amelyben szerepel a 9-es, meg lehet oldani annak alapján, hogy a 9 az majdnem 10, csak eggyel kevesebb nála. Ez kétféleképpen is figyelembe vehető: az ellensúlyozó és az átlépő technikával. Például a 9+7 összeadásban az ellensúlyozó diák valójában a 10+7–1 műveletet végzi el (ha az összeadásra és a kivonásra egyaránt ezt a technikát alkalmazza, ügyelni kell, hogy bele ne zavarodjon, mikor kell a végén egyet kivonni vagy hozzáadni). Az átlépő a 9+1+6 műveletet végzi el (vagyis előbb kipótolja a 9-et 10-re, és csak a „többi" 6-ot adja hozzá). Mindkét technikával gyakorolhatók a következő feladatok: 28+9, 369+5, 24–9, 54-29, 460+90, 821–90 stb.

Hasonló technikával elvégezhetők olyan összeadások és kivonások, amelyekben a 90, 99, 900, 990, 999, 9000, 9999 stb. számok szerepelnek.

Szorzások esetén is használható ez a következtetési mód, mint azt a korábbi fejezetekben már bemutattuk. Az n·9 szorzás mindig számolható úgy, hogy az n·10 szorzatból egy n lépést teszünk visszafelé. A logika kiterjeszthető a 90-nel, 99-cel, 999-cel stb. végzett szorzásokra is.

A 14·9 egy 14-essel kevesebb a 14·10-nél.
Azaz 14·9 = 140–14 = 126.



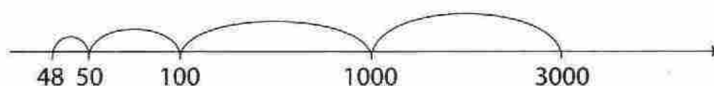


Ha írásbeli kivonás során kerek számból (10-többszörösből) kell kivonni, számításunk a folytonos maradékátvitel miatt meglehetősen bonyolult lesz. A most tárgyalt technikával ez elkerülhető. A kerek számot eggyel csökkentve végrehajthatunk egy maradékok nélküli kivonást. Az eredményhez végül hozzá kell adnunk 1-et. Például a 3000–48 helyett számítsuk ki a 2999–48-at. Ebben nincsen maradékátvitel, és a végén csak hozzá kell adni 1-et a kapott eredményhez.

```
 2999+1
-  48
 2951
```

Ez a módszer nagyon hasznos a többjegyű számok írásbeli kivonása esetén, és segíthet a hezitálóknak dönteni a kétféle kivonási mód között (írásbeli kivonás, illetve kiegészítő összeadás az üres számegyenes mentén). A 3000–48 példánál a többség bizonyára nem a számegyenes mentén való számolást fogja választani.

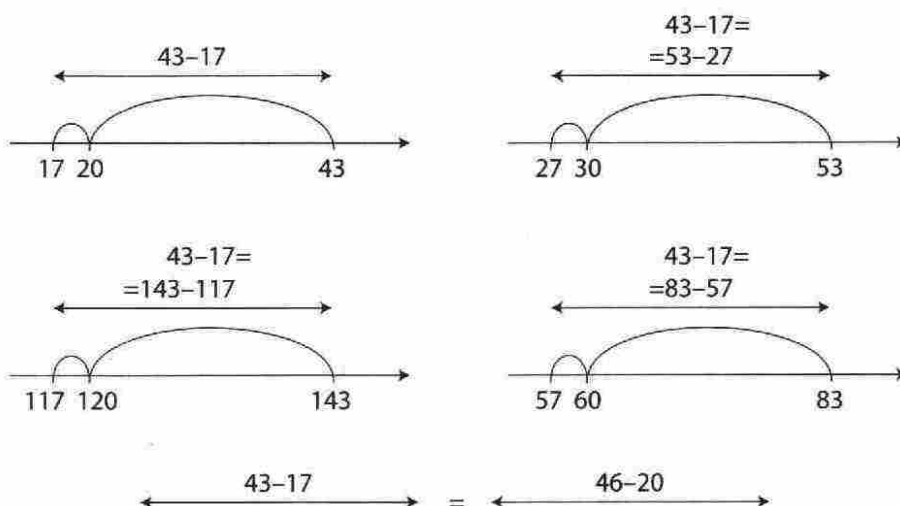
3000–48=



7. A kivonás mint a különbség megtalálása

Mint e fejezet 1. pontjában, a hiányzó számokkal összefüggésben említettük, a kivonással kapcsolatban többféle módon is lehet gondolkodni. A legfontosabb annak megértése, hogy a kivonás tulajdonképpen két szám összehasonlítása a számegyenesen, a megoldást pedig a köztük lévő különbség (távolság) adja. Ezt alaposan körüljártuk a 2–4. fejezetekben.

Ha a diákok megértették, hogy egy kivonás eredménye a két szám közti távolság nagysága (a számegyenesen), akkor azt is meg tudják tanulni, hogy ezt a távolságot ide-oda lehet tologatni a számegyenes mentén. Vagyis, ha egy kivonás mindkét számát (a kisebbítendőt és a kivonandót is) ugyanannyival megnöveljük vagy csökkentjük, a köztük lévő különbség (mint „helyhez nem kötött" távolság) nem változik. Például, a 43–17 kivonás eredménye ugyanaz, mint az 53–27, a 143–117 vagy a 83–57 kivonásoké. Az utóbbi három művelet az eredetiből származik, megalkothatók a számoknak a számegyenes mentén (10 többszöröseivel) való egyszerű eltolásával. Így a köztük lévő távolság sem változik. Ebből az is következik, hogy a távolság nem csak kerek számmal való eltolás esetén nem fog változni; bármilyen számmal eltolhatjuk a két eredetit. Például az eredeti számokat 3 egységgel növelve, 43–17 helyett kiszámolhatjuk a 46–20 kivonás eredményét, ami nyilván sokkal könnyebben és gyorsabban megy.



A kivonásnak ezt a módját néha „egyenlők hozzáadásának" nevezik. A cél az, hogy a kivonandót „praktikus" számmá alakítsuk (például 10-többszörössé), hogy a kivonás könnyebben elvégezhető legyen. Például a 155–78 kivonás eredménye ugyanaz, mint a 157–80 vagy a 177–100 kivonásé. A megadott számokat úgy kell megváltoztatni, hogy a kivonást ne kelljen írásban elvégezni, hanem fejben is kiszámolható legyen.

$$\begin{array}{r} 43 \\ -17 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[+3]{+3} \begin{array}{r} 46 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 155 \\ -78 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[+2]{+2} \begin{array}{r} 157 \\ -80 \\ \hline \end{array} \xrightarrow[+20]{+20} \begin{array}{r} 177 \\ -100 \\ \hline \end{array}$$

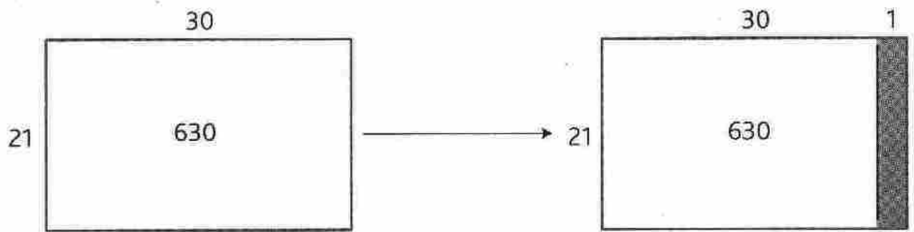
8. A szorzótábla

Már többször említettük, hogy a szorzótábla tanulása során a szorzatok mellett kezdettől fogva nagy súlyt kell helyezni a következtetések levonására. Az a diák, aki nem képes fejben tartani az összes eredményt, képes lehet kikövetkeztetni azokat a 2-szeres, 5-szörös és 10-szeres „csomóponti" szorzatokból. Sok-sok gyakorlással a diák azt is meg fogja érteni, hogy a szorzás kommutatív, vagyis $a \cdot b = b \cdot a$; asszociatív, vagyis $a(bc) = (ab)c$; és disztributív az összeadásra és a kivonásra nézve, vagyis $a(b \pm c) = ab \pm ac$.

Olyan következtetéseket kell gyakoroltatni, mint például: ha 6·5 az 30, akkor 5·6 is 30; továbbá 15·6 = 15·(2·3) = (15·2)·3 = 30·3; vagy 5·12 = 5·(6·2) = (5·6)·2 = 30·2; vagy 6·4 = 6·(5–1) = 6·5–6·1 = 30–6 = 24, ami egyúttal 6 duplájának a duplája; vagy 60·50 = 3000; vagy 300:60 = 5 stb.

Az 5. és 6. fejezetben további következtetések találhatók a szorzótáblával kapcsolatban.

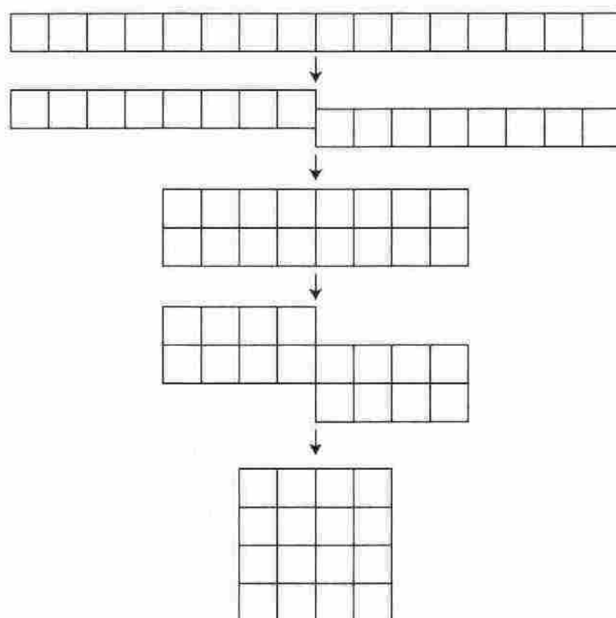
Hasonló logikával sok mindent kikövetkeztethetünk nagy számok esetén is. A tanítás során használhatjuk a téglalap-vázlatokat (lásd az alábbi ábrán), hiszen korábban már megtanítottuk a diákokat a szorzás területi modelljének használatára. Például: fejben kell levezetni, hogy mennyi 31·21. Ha tudjuk, hogy 30·21=630, jó eséllyel bárki összekeveri, hogy ezután még 21-et, 30-at vagy 31-et adjon-e hozzá a 630-hoz. Egy vázlatos ábra megkönnyíti a választ: megmutatja, hogy egy 21-es „szeletet" kell hozzáadni a korábbi téglalaphoz.



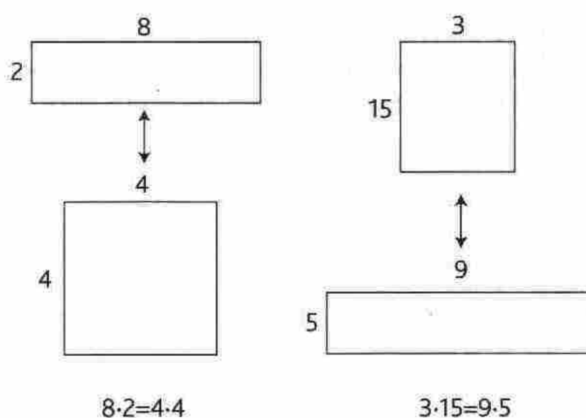
Ha 30·21=630, ebből következik, hogy 31·21=630+21.

9. A szorzótábla további következményei

A 6. fejezet 8. gyakorlatában megtanítottuk a diákokat osztók és prímszámok kezelésére kis kockák téglalap alakzatba rendezésével. Az alábbi ábra azokat a különböző elrendezéseket mutatja, amelyeket 16 kockából alakíthatunk ki. Hasonlítsuk össze ezt 17 kocka egyetlen lehetséges elrendezésével. A diákok a konkrét eszközökkel való tevékenykedés tapasztalataiból megtanulják, hogy a különböző alakzatokba rendezhető (kockák által reprezentált) számoknak vannak 1-en és önmagukon kívüli további osztóik, ezek a számok lehetnek más számok többszörösei – szemben a csak egyféle, hosszanti elrendezést adó prímekkel.



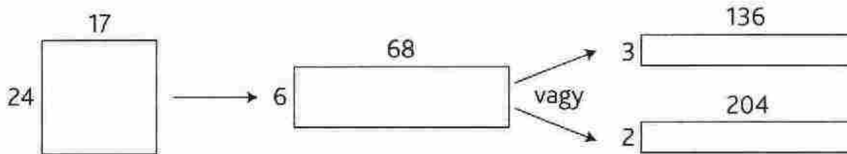
A szemléltetőeszközök (illetve az ábrák) egyúttal azt is megmutatják, hogy 16·1 megegyezik 8·2-vel és 4·4-gyel. Amikor a diákok vázlatos rajzokon szemléltetik ezeket a konkrét elrendezéseket, hívjuk fel a figyelmüket arra, hogy ha átrendezéskor egy téglalap egyik oldala feleződik, akkor a másik duplázódik. Hasonló feladatokat érdemes végezni olyan téglalapokkal, amelyek oldalai átrendezéskor nem egyszerűen feleződnek és duplázódnak, hanem más arányban változnak; például a 15·3-as téglalapot alakítsuk át 5·9-essé és viszont. Fontos, hogy a téglalap területe (a felhasznált kockák száma) az átalakítások során változatlan, vagyis ahányad részére csökken az egyik oldal, ugyanannyiszorosára nő a másik.*



A fentiek jelentősége abban áll, hogy ezzel a módszerrel egy többjegyű számmal való szorzást könnyen átalakíthatunk egyjegyűvel való szorzássá. Ezáltal kevesebb lépésben és egyszerűbb számokkal végezhetjük el a műveletet. A szorzás területi modelljét értő és magabiztosan használó diákok ilyen következtetésekkel nehéz szorzásokat is könnyen elvégezhetővé alakíthatnak.

Például a 17·24 szorzást, az ezt jelző téglalap-vázlatot a 17-es oldal négyszerezésével és a 24-es oldal negyedelésével könnyen átalakíthatjuk 68·6 szorzássá. Ez az egyjegyűvel végzendő szorzás sokkal egyszerűbb feladat, mint az eredeti. Az eredeti szorzás még könnyebbé tehető a 136·3 vagy a 204·2 átalakításokkal.

* Vagyis megmutatjuk a fordított arányosság fogalmát. (A ford. megjegyzése)



A téglalapok átalakítása megmutatja, hogyan lehet többjegyű helyett egyjegyűvel szorozni.

A diákok eltöprenghetnek azon, hogy ez a számítási módszer hogyan használható a szorzás különböző szintjein. Egy összetett feladat közbülső részeredményeit kiválóan meg lehet határozni és le lehet jegyezni a téglalap-vázlatokkal, és így akár egészen egyszerű lépéseken át el lehet jutni a végeredményig. Egyes diákok nehezen jegyzik meg az 5-nél nagyobb számokkal való szorzások eredményét. Ez a módszer nekik is segíthet, mert néhány lépésben kisebb számmal való szorzássá alakítható át a feladat.

10. A szorzás területi modelljének kiterjesztése más témákra

Ha a diák megértette a szorzás területi modelljét, és képes a téglalap-vázlatok segítségével szorzási feladatokat kiszámolni, akkor már elboldogul minden feladattal, amelyben szorzást kell alkalmazni, legyen szó közönséges vagy tizedes törtekről, esetleg algebráról.

Például ha két törtet kell összeszorozni (legyen akár vegyes tört, akár tizedes alakban), a törteket fel lehet bontani „kezelhetőbb" részekre, modellezhetjük őket mezőkre (rekeszekre) osztott téglalap-vázlattal, és el lehet végezni a számítást különálló lépésekben, amelyek részeredményeinek összegzésével jutunk el a megoldáshoz (lásd az alábbi ábrát).

Példa: $5\frac{1}{2}\cdot1\frac{1}{2}$

	5	$\frac{1}{2}$
1	5	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$5\frac{1}{2}\cdot1\frac{1}{2}=5+2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=8\frac{1}{4}$

Példa: 41,5·3,2

	40	1	0,5
3	120	3	1,5
0,2	8	0,3	

41,5·3,2=120 +8+3+1,5+0,3=132,8

A törttel való osztást ugyanúgy kell kezelni, mint bármely más osztást. Végig kell gondolni, hogyan lehet az adott területű téglalapot az osztó szerinti adott magassággal megrajzolni. Ez hozzásegíti a diákot annak megértéséhez, hogy a törttel való osztást miért lehet végrehajtani a reciprokával való szorzásként. Például, ha egy 5 egység területű, de csak $\frac{1}{3}$ egység magasságú téglalapot kell rajzolni, akkor világos, hogy minden egységnyi területnek 3 egység szélesnek kell lennie, mert három harmad adja ki az egyet, így a téglalap összességében $5:\frac{1}{3}=5\cdot3=15$ egység széles lesz.

Példa: $5:\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$	5

$5:\frac{1}{3}=5\cdot3=15$

Példa: $9:1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}$	9

$9:1\frac{1}{2}=9\cdot2:3=6$

Algebrai kifejezések szorzatát is ki lehet számolni ugyanígy, a területi modell segítségével, téglalap-vázlatokkal. Mindegyik tényezőt fel kell bontani, bármilyen módon, amely megkönnyíti kezelésüket. Előbb a részszorzatokat kell képezni, majd azok összegeként megkapjuk a végeredményt. Ez az eljárás nem függ attól, hogy a diák fel tudja-e bontani a zárójeleket (a tagok összepárosításával akár írásban, vonalakkal, akár fejben, például szita-módszerrel). Az elvont, algebrai szorzás logikusan kötődik a konkrét, számok közti szorzáshoz. A módszer jól mutatja, hogy ha két kéttagú kifejezést szorzunk össze, akkor a végén négy részszorzatot kell összeadni. Ezáltal elkerülhető lesz az a gyakori hiba, hogy a diák csak három ilyen tagot határoz meg és ad össze.

Példa: $(x+3)(x+1)$

	x	3
x	x^2	3x
1	x	3

$(x+3)(x+1)=x^2+3x+x+3=x^2+4x+3$

Példa: $(x-1)(2x+5)$

	x	–1
2x	$2x^2$	–2x
5	5x	–5

$(x-1)(2x+5)=2x^2+5x-2x-5=2x^2+3x-5$

11. Gondolatok az osztásról

Miközben a diák a szorzás és az osztás téglalapokkal való megjelenítésével dolgozik, valószínűleg feltűnik neki, hogy az osztás szorosan összefügg az (egyenes) arányossággal. Ha nem, fel kell rá hívni a figyelmét. Például, a 6:3 ugyanazt az eredményt adja, mint a 12:6, a 10:5 vagy a 28:14, mert az osztandó és az osztó ugyanolyan arányban áll egymással. Ha egy téglalap-vázlat területeként beírjuk ezeket az osztandókat, egyik oldalaként pedig ezeket az osztókat, a másik oldal mindig ugyanakkora lesz.

Ez a felismerés segít a törtek egyszerűsítésében is. Először meg kell tanítani, hogy a számláló és a nevező közti törtvonal tulajdonképpen egy osztást jelöl. Ha egy osztást törtként fogunk fel, és egyszerűsítjük azt, az eredeti osztás is sokkal könnyebben elvégezhető, hiszen kisebb számokkal (például többjegyű helyett csak egyjegyűvel) kell dolgozni, és elég lehet csak a szorzótábla ismerete. Esetleg az egész osztás megoldható a tört egyszerűsítésével (mert egész eredmény születik).

Például az olyan feladatok, mint a 128:16 vagy a 384:24, sokkal könnyebben megoldhatók, ha törtnek tekintjük, és egyszerűsítjük őket. A módszer nagy előnye, hogy a diák akkora lépésekben egyszerűsíthet, amekkorákat a tudása, a szorzótábla biztos ismerete megenged – több kicsiben vagy akár egy lépésben (a legnagyobb közös osztóval). Mindkét fenti példában egyszerűsíthetünk rögtön az első lépésben 8-cal, vagy akár kis lépésekben, többször egymás után 2-vel, vagy ezek közül kettőt egybefogva, 4-gyel – kinek hogyan átláthatóbb.

$$128:16 \longrightarrow \frac{128}{16} \xrightarrow[:8]{:8} \frac{16}{2} \xrightarrow[:2]{:2} 8$$

$$\text{vagy} \quad \frac{128}{16} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{64}{8} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{32}{4} \xrightarrow[:4]{:4} 8$$

$$384:24 \longrightarrow \frac{384}{24} \xrightarrow[:8]{:8} \frac{48}{3} \xrightarrow[:3]{:3} 16$$

$$\text{vagy} \quad \frac{384}{24} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{192}{12} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{96}{6} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{48}{3} \xrightarrow[:3]{:3} 16$$

Törtet egyszerűsíteni sokkal könnyebb, mint többjegyű számmal osztani.

További előnye jelentkezik ennek a módszernek, ha az eredmény maga is tört. Például a 36:48 művelet végrehajtása viszonylag hosszadalmas, és az eredmény is több tizedes jegyet tartalmaz. Könnyebb felírni a $\frac{36}{48}$ törtet, majd egyszerűsíteni a lehető legegyszerűbb alakjára. A biztos tudású gyerek ezt egy lépésben, 12-vel egyszerűsítheti. A bizonytalanabb – felismerve, hogy mindkét szám páros – először csak 2-vel, azután megint 2-vel egyszerűsít (azaz felez). Bármelyik eljárás jobb, mint 48-cal osztani.

$$36:48 \longrightarrow \frac{36}{48} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{18}{24} \xrightarrow[:2]{:2} \frac{9}{12} \xrightarrow[:3]{:3} \frac{3}{4}$$

Ha az egész osztást nem is lehet megoldani egy tört egyszerűsítésével, a módszer segíthet könnyebbé tenni az eredeti kérdést. Például a 207:63 helyett nyilván mindenki szívesebben számolná ki a 23:7 osztást.

$$207:63 \longrightarrow \frac{207}{63} \xrightarrow[:3]{:3} \frac{69}{21} \xrightarrow[:3]{:3} \frac{23}{7}$$

Az egyszerűsítés technikájával az előző fejezet végén részletesen tárgyalt 784:16 osztás – néhány könnyű lépésben, 4-gyel vagy kétszer 2-vel egyszerűsítve – a sokkal egyszerűbb és rövidebb 196:4 műveletre redukálható. A szintén az előző fejezet végén tárgyalt 5724:54 is könnyen egyszerűsíthető (háromszor 3-mal) 212:2 feladattá, amely már csak egy felezést igényel a végeredmény eléréséhez.

Hogy e technika minden előnyét kihasználhassák, a diákoknak ismerniük kell az oszthatósági szabályokat:

- 2-vel a páros számjegyre végződő számok oszthatók;
- 10-zel a 0-ra végződő számok oszthatók;
- 5-tel az 5-re vagy 0-ra végződő számok oszthatók;
- 4-gyel a 4-gyel osztható kétjegyű számra végződő számok oszthatók;
- 3-mal azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege is osztható 3-mal;
- 9-cel azok a számok oszthatók, amelyek számjegyeinek összege is osztható 9-cel.

Az egyszerűsítés helyett vagy mellett sokszor hasznos lehet a bővítés is. Jó példa erre a 180:15. A tényleges osztásnál nyilvánvalóan könnyebb a törtet (5-tel és 3-mal, tetszőleges sorrendben) egyszerűsíteni, hogy megkapjuk az eredményt. Első lépésben 2-vel bővítve még egyszerűbben megoldható a feladat, mert szorozni könnyebb, mint osztani.

$$180:15 \longrightarrow \frac{180}{15} \xrightarrow[:5]{:5} \frac{36}{3} \xrightarrow[:3]{:3} 12$$

$$\text{vagy} \quad \frac{180}{15} \xrightarrow[\cdot 2]{\cdot 2} \frac{360}{30} \xrightarrow[:10]{:10} \frac{36}{3} \xrightarrow[:3]{:3} 12$$

Az egyszerűsítés technikája természetesen csak olyan osztásokban használható, amelyekben nincs maradék. Ezzel együtt is nagyon hasznos módszer, amely fejleszti a logikus gondolkodást és a következtetési képességet.

Kislexikon*

algoritmus: Alkalmazandó szabályok vagy egymást követő eljárások, lépések előírt sorrendje, amely elvezet egy számolási feladat megoldásához.

asszociativitás: → *csoportosíthatóság*

átlát (megbecsül): Az a képesség, hogy valaki meghatározza elemek mennyiségét a megszámlálásuk nélkül. Általában 4-ig megy könnyen, az átlagos emberi határ a 7.

bontás: Egy nagyobb szám részeire bontása, például → *összetevői*re vagy → *helyiérték*ek szerinti egységekre, vagyis mindenképpen két vagy több, kisebb mennyiségre – általában azért, hogy megkönnyítsünk egy számítást. Például a 12-t bonthatjuk 6+6-ra, 10+2-re vagy 4+4+4-re stb. Bontásra van szükség például a 21–15 írásbeli kivonásnál is: 1-ből nem tudjuk kivonni az 5-öt, csak a 11-ből, amihez a 21-et (fejben) 10+11-re kell bontani.

csomópontok✧ **(csomóponti szorzatok):** A brit metodika szerint a szorzótábla néhány lényeges, központi szorzata, amelyeket fejből kell tudni, a többi szorzat pedig ezekből vezethető le. Nem merev kategória; ide tartozik természetesen minden szám egyszerese és tízszerese, de ide sorolhatják a számok ötszörösét (ami megkapható a tízszeres felezésével), vagy kétszeresét is. A → *kettőzés* (duplázás) szintén kitüntetett helyet foglal el a brit módszertanban. Ezek a szorzatok például a → *lerövidítések*hez nyújtanak kiindulópontot.

csoportosíthatóság✧ **(asszociativitás):** Egy művelet azon tulajdonsága, hogy a végeredmény nem függ a benne szereplő számok különböző csoportosításától. Ilyen például az összeadás, mert $(a+b)+c = a+(b+c)$, vagy a szorzás, mert $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – de nem ilyen például a kivonás vagy az osztás.

Dienes-készlet✧**:** Elsősorban a helyiértékek és az egyes számrendszerek megértését szolgáló szemléltetőeszköz. Bővebben lásd a *Melléklet*ben.

diszkrét✧ **(szemléltetőeszköz):** Elkülönülő darabokból, „egyesekből" álló, azokból felépülő, vagy ilyenek mintázatát tartalmazó szemléltetőeszköz. Például → *számolókorongok*, → *kavicsok*, abakusz, dobókockák, dominók stb. Lásd még → *folytonos* szemléltetőeszköz.

disztributivitás: → *széttagolhatóság*

dobóka✧**:** A társasjátékokban megszokott, szabályos, hatoldalú dobókockához (hexaéderhez), hasonló funkciójú, de más oldalszámú játék „kocka". A négy-, nyolc-, tizenkét- és húszoldalú dobóka szabályos geometriai test (tetraéder, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder) – de létezik tíz- és harmincoldalú is (ezek egybevágó deltoidokból, illetve rombuszokból épülnek fel). A brit játékkultúrában széles körben használják őket. Szerepjátékok tartozékaiként itthon is terjedőben vannak.

egyszerűsítés: Egy tört számlálójának és nevezőjének ugyanazzal a (nullától különböző) számmal való egyidejű elosztása, amelynek eredményeként kisebb számokkal írunk fel egy azonos értékű törtet. Csak akkor hajtható végre, ha a számlálónak és a nevezőnek van (1-nél nagyobb) közös osztója.

* A *Kislexikon* szócikkeit kiegészítettük számos, az angol eredetiben nem szereplő, de a könyvben tárgyalt, vagy a bevett magyar szaknyelvhez képest újdonságot jelentő fogalommal és magyarázattal. Ezeket ✧ jelöli. (A ford. megjegyzése)

ellensúlyozó módszer✧: Az összeadásban és a kivonásban szereplő 9-es szám kezelésére vonatkozó eljárás. A 9 hozzáadása helyett 10-et adunk hozzá a másik számhoz, majd a végén az eredményből kivonunk 1-et. Kivonásnál fordítva. A módszer sok esetben megkönnyíti a számítást.

fejben számolás: Gondolati úton, „fejben" végzett számítások; szemben a konkrét segédeszközökkel (ujj, korong, számszalag stb.), papíron, írásban vagy számológéppel végzett számításokkal. Ha csak a kiinduló számokat és a részeredményeket jegyezzük le, ez még nem tekintendő írásbeli megoldásnak, csak méltányolható „memóriasegédletnek".

felcserélhetőség (kommutativitás): Egy művelet azon tulajdonsága, hogy a benne szereplő számok felcserélhetők egymással anélkül, hogy az eredmény változna. Ilyen például az összeadás $(a+b=b+a)$ vagy a szorzás $(a\cdot b=b\cdot a)$ – de nem ilyen például a kivonás és az osztás.

folytonos✧ **(szemléltetőeszköz):** Olyan eszköz, amely a számokat nem egységekből, egyesével építi fel (mint a → *diszkrét* eszközök), hanem egészben, önálló egységként, → *tömb*ként kezeli és jeleníti meg. Ilyen például a → *színes rudak* készlete és a → *Dienes-készlet*.

helyiérték: Számírási rendszerünkben egy számjegy valódi értékét (alaki értékén kívül) a számon belül elfoglalt helye, pozíciója (helyiértéke) határozza meg. Például az 555 számban mindegyik 5-ös más értéket képvisel.

helyiérték-tartó✧: A magyar oktatási gyakorlatban nem használatos szemléltetőeszköz. Olyan „háttér", amely előre beosztott helyeket (→ *helyiérték*eket) jelöl ki az egyes számoknak (számjegyeknek), amelyeket így a megfelelő helyre téve, írva, megjeleníthetjük egy szám valódi értékét. A legegyszerűbb esetben mezőkre (cellákra) osztott papírlap is lehet. Kidolgozottabb, „fejlettebb" változatban olyan tartószerkezet, amelynek 1×1 cm-es lyukaiba beleillenek a → *színes rudak*.

kavicsok: A számolásokhoz jól használható segédeszközök. Nem csak valódi, kisebb kövek lehetnek, hanem (például kézműves vagy dekorációs boltokban kapható) apró, közel félgömb formájú színes üvegdarabok, amelyeket többek között asztali dekorációként árulnak.

kerek szám: A hétköznapi nyelvhasználatban: 0-ra végződő szám. A precíz matematikai meghatározás szerint: „10 többszöröse".

kettőzés✧ **(duplázás):** A brit metodikában központi helyet elfoglaló ismeret, módszer. Az egész számok kétszeresét még a szorzótábla előtt, tulajdonképpen az összeadás és a szorzás közti átmenetként tanítják. Alapvető, a tanulási nehézségekkel, memóriazavarokkal küzdő diákoktól is elvárt tudásanyagnak számít. Fordítottja a (szintén kitüntetett) felezés.

kiegészítő összeadás: A kivonás egy módja, amely az összetevők megkeresésén alapul. Előrefelé számolást igényel, az egyik szám kiegészítését a másikra, vagy a kettő közti különbség (a számegyenesen: távolság) meghatározását. Például a 25–18 eredményét a 18-tól 25-ig való elszámolással határozzuk meg (lehetőleg nem egyesével, hanem → *tízes átlépés*sel, ugrásokkal).

kiegészítő rész (pár): Olyan szám, amely egy adott számot valamely rögzített értékre, ebben a könyvben jellemzően 10-re vagy annak többszöröseire, hatványaira egészít ki. Például a 2-nek a 8 a (10-re) kiegészítő része, a 22-nek a 78 a (100-ra) kiegészítő része stb. (Lásd még: → *pótlás*.)

kisebbítendő, kivonandó: A kivonás műveletében a kisebbítendőből vonjuk ki a kivonandót. Például a 25–7 műveletben a 25 a kisebbítendő, a 7 a kivonandó (az eredmény, a 18 pedig a különbség).

kommutativitás: → *felcserélhetőség*

lerövidítések✧: A brit metodika bizonyos szorzótábláknak másokból következtetéssel való kiszámolását nevezi így (ha már a gyerek nem tudja megtanulni valamennyit). A → *csomópontí szorzatok*ból például → *kettőzés*sel, felezéssel, egy-egy előre- vagy hátralépéssel meghatározhatók más szorzatok. (Például a 4-es szorzótábla a 2-esből duplázással, az 5-ös a 10-esből felezéssel, a 9-es a 10-esből egy visszalépéssel stb.) (Hogy persze a megértés, a matematikai gondolkodás e viszonylag magasabb szintjét igénylő módszer épp annak a gyereknek, aki tanulási nehézségei folytán nem tudta bevágni a szorzótáblát, mennyiben egyszerűsíti a helyzetét, mennyire „rövidíti le" a számítása menetét, afelől vannak kétségek. A ford. megjegyzése)

osztó, osztandó: Az osztás műveletében az osztandót osztjuk el az osztóval. Például a 143:11 műveletben a 143 az osztandó, a 11 az osztó (az eredmény, a 13 pedig a hányados).

osztók: Olyan számok, amelyek maradék nélkül megvannak valamely másik számban. (A precíz matematikai definíció nem így hangzik, de ebben az (életkori és tanulmányi teljesítményi) körben ez is megfelelő. A ford. megjegyzése) Például az 5 osztója a 15-nek (a 15 további osztói az 1, a 3 és a 15).

összeadandó (tag): Az összeadásban szereplő számok vagy mennyiségek közös neve. Például a 6+8 összeadásban a 6 és a 8 is összeadandó vagy tag. (Mivel az összeadás kommutatív, mindegy, melyik melyik.) A 6+□=10 feladatban a 4 hiányzó összeadandó.

összetevő: Egy nagyobb számot tekinthetünk több összetevő (kisebb szám) összegének. Ebben a könyvben gyakran a számok → *tömb*ökből és egyesekből való felépítésének megkülönböztetésére használjuk. Például a 6 összetevői a 3 és 3 (vagy a 2 és 4, 5 és 1, vagy 1 és 2 és 3) – szemben az egységekből való felépítéssel, amely a 6-ot pusztán 1+1+1+1+1+1-nek tekinti.

pótlás✧: Egy egyjegyű szám kiegészítése 10-re. A → *tízes átlépést* igénylő műveletekben a második összeadandót két részre bontjuk: az egyik az első összeadandót 10-re (vagy annak valamely többszörösére) kipótló rész („pótló rész"), a másik a „fennmaradó rész". (Lásd még: → ***kiegészítő rész.***)

számegyenes: A számok ábrázolási módja. Jóval elvontabb, mint a → *számszalag*. A számegyenesen az egyes pontok jelentik a számokat. A számegyenesen való számolás a számok közti szakaszok, intervallumok megszámolását jelenti. Sokféleképpen jelölhetők rajta a számok, a törtek éppen olyan könnyen, mint az egészek. Nem szükséges csupa egymást követő számot megjelölni.



A fejben számolást legsokoldalúbban támogató számegyenes az üres (azaz kezdetben feliratozás nélküli) számegyenes, amelyen a számokat a számítás végzése közben jelöljük meg. Ez egy vázlat, ezért szabadon kezelhetjük a feliratokat. Annyi pontot (számot) jelölünk meg, amennyire éppen szükség van, és nem szükséges precíz távolságarányokat feltüntetni. Az összeadás és a kivonás is jól szemléltethető az egyenes mentén való mozgásként, ívekkel jelölt „ugrásokkal".



számlálás✧: Egy halmaz elemeinek többnyire egyesével való számbavétele úgy, hogy a halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a természetes számok halmazából a soron következőt.

számolás✧: Általános fogalom matematikai műveletek végzésére (hétköznapi értelemben is).

számolókorongok✧: Kartonból vagy műanyagból készült körlapok. Bővebben lásd a *Mellékletben*.

számszalag: A számok ábrázolási módja egyenlő közönként, egyenlő területű mezőkbe (cellákba) írt számokkal. Akár elhelyezzük minden egyes mezőben a feliratot, akár nem, egy mező mindenképpen egy számot jelöl, szomszédos mezők pedig szomszédos számokat, ezért a modell csak az egymást követő egész számok ábrázolására alkalmas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

szétttagolhatóság✧ (disztributivitás): Két műveletet összekötő tulajdonság. Az egyik művelet disztributív a másikra (például a szorzás az összeadásra) nézve, ha a zárójelen kívül álló egyik és belül álló másik műveletre érvényes az alábbi felbontási tulajdonság: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

szétválasztós módszer✧: Az összeadás egyik módja, amelynek során a számokat → *helyiértékeik* szerinti részekre választjuk szét, és így képzünk részösszegeket, amelyeket végül összeadunk. Az írásbeli összeadás előfutárának tekinthető módszer.

színes rudak✧: A legalapvetőbb szemléltetőeszköz: 1 cm^2-es keresztmetszetű, 1 cm-ként változó hosszú, rögzített színkódú rudak. Bővebb ismertetésüket lásd a *Mellékletben*.

szorzók (tényezők): A szorzásban szereplő számok vagy mennyiségek közös neve. Precíz megfogalmazásban megkülönböztetünk szorzandót és szorzót (a 4·8 szorzásban a 4 a szorzandó, a 8 a szorzó), de mert a szorzás kommutatív, végül is mindegy, melyik melyik. (Egyrészt az angol értelmezés a két tényező megnevezésében épp fordított, másrészt a magyar nyelvtanhoz sem szerencsésen illeszkedik ez a különbségtétel. A „négy nyolcszor" volna a teljesen megfelelő fordulat, de ez nem hangzik túl jól magyarul. A ford. megjegyzése)

tag: → *összeadandó*

tényezők: → *szorzók*

tízes átlépés: A számok egymás után következésén alapuló technika, amelyet összeadás és kivonás során alkalmazhatunk, nem egyesével való lépegetés, hanem alkalmas → *tömb*ök vagy ugrások formájában. Az egymást követő ugrások között kötelező „megállóként", „ugródeszkaként" egy kiemelt jelentőségű szám szerepel (például a tízes számrendszerben a 10 és bármely többszöröse).

tömb: Egy szám egészben, egyben, globális egységként kezelve, nem pedig egyesek csoportjaként. Ha egy számot tömbökre bontunk, akkor nem csupa egyesekre, hanem nagyobb számok összegére bontjuk.

üres számegyenes: →*számegyenes*

Tárgymutató

Az elektronikus *Melléklet* tartalma

1. MELLÉKLET

A szemléltetőeszközökről

Szemléltetőeszköz bármi lehet, amit a diák megfoghat, kézbe vehet, mozgathat, csoportosíthat, átrendezhet stb. Az alábbiakban bemutatunk néhány általánosan használt eszközt.

Számolókorongok

Kartonból vagy műanyagból készült körlapok, lehetőleg nem túl kicsik. Használhatunk helyettük kavicsokat is (kisebb köveket vagy apró, közel félgömb formájú színes üvegdarabokat, amelyeket eredetileg váza- vagy asztali díszként árulnak például kézműves és dekorációs boltokban). További alternatívák: kicsi kockák (akár dobókockák, akár a színes rudak egységei), fa építőkockák (persze egyformák), nyalóka vagy jégkrém pálcikái, játékzsetonok, bab- vagy borsószemek, (nem túl kicsi) gyöngyök, gombok, diók, kagylók stb.

Hasznos lehet, ha nem mindig ugyanazokat a tárgyakat, készleteket használjuk (hogy a konkrét tárgyaktól elvonatkoztatva, a *számuk*nak legyen jelentősége). A kisdiákok és a diszpraxiások esetén nagyobb darabokat használjunk, hogy könnyebb legyen velük manipulálni. Törekedjünk egyforma darabokból álló készletek használatára: a sokféle méretű, alakú vagy színű elemek zavaróak lehetnek, hiszen az eltérések csak megosztják, elterelik a figyelmet a közös tulajdonságról. Ezért a „korongok" legyenek azonos színűek, lehetőleg szabályos alakúak, egyforma méretűek. Nagyon hasznosak a kis számokkal végzendő tevékenységekhez, a mennyiségek mintákba rendezéséhez, 20 feletti számoknál azonban már nem célszerű a használatuk. Mivel különálló darabok jeleznek minden egyes egységet, és ezekből épülnek fel a nagyobb mennyiségek, *diszkrét* eszközöknek is nevezik őket.

Színes rudak

A színes rudak készletét az 1930-as években az elemi iskolai számtanoktatás támogatására találta ki, majd egy évtizeden át fejlesztette a belga Georges Cuisenaire. Az eredetileg fából, ma már műanyagból készült rudak mindegyikének 1 cm oldalú négyzet a keresztmetszete, hosszuk pedig 1 cm-ként növekszik, a megjeleníteni kívánt számnak megfelelően. A rudak együtt használhatók a Dienes-készlet elemeivel. A jobb megkülönböztethetőség kedvéért rögzített színkód is jelöli az egyes méreteket, így könnyű azonosítani a képviselt értéket (a rúd hosszának megmérése nélkül).* Ez a legfőbb előnye ennek az úgynevezett *folytonos* eszköznek. Mivel a rudakon nincsenek feliratok vagy beosztások, használatuk elősegíti, hogy a diákok minden egyes számot, mennyiséget önálló egészként (tömbként) lássanak, ne egységek gyűjteményeként. Ezzel a hatékonyabb, nem egyesével számlálva végzett számítási eljárásokra ösztönzik a gyerekeket.

* A színezés némileg eltérő Angliában és nálunk; sőt, itthon a sokféle gyártó miatt nem is teljesen egységes. A legelterjedtebb változat a következő: 1 – fehér, 2 – rózsaszín, 3 – világoskék, 4 – piros, 5 – sárga, 6 – lila, 7 – fekete, 8 – bordó, 9 – sötétkék, 10 – narancssárga, 12 – zöld, 16 – barna. (A ford. megjegyzése)

A színes rudak használata Anglia elemi iskoláiban az 1950-es években terjedt el dr. Caleb Gattegno tevékenysége nyomán, aki társaságot is alapított az ügy érdekében. A színes rudak használata jótékonyan hatott az oktatásra, és hatására a kormányzati figyelemben és kommunikációban is nőtt a matematika súlya.*

Mahesh Sharma professzor, a kiváló amerikai matematikaoktató a színes rudak használatának egyik élharcosa. Ezek ugyanis segítik a világos és biztos gondolati modellek kialakulását, különösen a matematikai nehézségekkel küzdő diákok esetében. A professzor – számos cikke és könyve mellett – oktatóvideókat is publikált, amelyeken bemutatja, hogyan használhatók a színes rudak különböző korú diákok tanítása során.

A 2. mellékletben található egy bővebb ismertető a színes rudakról; ebben több mint húsz ötletet adunk közre matematikai felhasználásuk lehetséges módjairól. Fekvő A4-es lapra kétoldalasan kinyomtatva, majd összehajtva négyoldalas A5-ös füzet készíthető belőle, ami éppen belefér a színes rudak készletének dobozába. Magyarországon a színes rudakat a Tanért forgalmazza, és számos papírboltban is kaphatók.

Dienes-készlet

Dienes Zoltán magyar matematikus nem sokkal Cuisenaire után állt elő saját szemléltetőeszközével, amely alapvetően a különböző számrendszerek megértését szolgálja. Az 1 cm oldalú kocka jelenti az egységet, az $1 \times 1 \times n$ cm-es rúd (tulajdonképpen a színes rudak egyike) pedig a számrendszer alapszámát, az n-est. Az $1 \times n \times n$ cm-es négyzetlap a következő, n^2 értékű eszköz, míg az n cm oldalú kocka n^3-t jelez. (Kis n – például 2, 3, 4 – esetén még $n \times n \times n^2$ cm méretű „nagyrúd” is lehet a készletben, n^4 értékben.) Ahogyan az n-es számrendszerben n darab kisebb egység éppen kitesz egy nagyobbat, egy következő helyiértékűt, úgy építhetők fel egymásból ezek a geometriai testek. Az $n=10$ esetben beszélünk a tízes számrendszert bemutató készletről. Az eszközök készülhetnek fából vagy műanyagból, és felületükön megjelenhet az 1 cm-es beosztás, hogy látható legyen, hány egységből épülnek fel. Mivel az 1 és 10 közötti számok – a színes rudakkal ellentétben – itt nem jelennek meg önálló elemként, csak egységekből építhetők fel, én magam jobban szeretek a rudakkal dolgozni. Esetleg kiegészíthetjük a színes rudakat a nagyobb helyiértékű Dienes-elemekkel.

Stern-eszközök

Dr. Catherine Stern egy Montessori-óvoda vezetője volt Németországban, amikor 1934-ben bemutatta első szemléltetőeszközeit más európai óvodapedagógusoknak. A második világháború után Amerikába emigrált, és itt fejlesztette tovább gyermekek számtantanítását segítő eszközeit. Az ő eszközei 2 cm élű kockák, illetve ezekből felépülő rudak, amelyek úgy néznek ki, mintha összetapadt kockákból állnának. Itt is minden rúd más színű, de színkódjuk sajnálatos módon eltér a színes rudakétól. Az eszközöket külön e célra készített felületeken (számolótáblák, mintázat-táblák, számdobozok stb.) kell használni, ami igen örömtelivé teszi a kisdiákoknak a velük való foglalatosságot. (Viszont a készlet meglehetősen drága.)

* Hazánkban 1978-ban vezették be az általános iskolákban a színes rudak készletét, az akkori matematika tanterv írta elő használatukat. Ma már nincs ilyen központi előírás, így nem minden (sőt, talán csak kevés) iskolában használják a pedagógusok. (A ford. megjegyzése)

Vegyes eszközök

További eszközök (gyöngysorok, unifix-kockák,* abakuszok stb.) szolgálják a diszkrét és a folytonos szemléltetőeszközök közötti átmenet megkönnyítését. Természetesen mindnek megvan a maga helye és haszna, de egyikük sem olyan sokoldalú, mint a színes rudak a Dienes-készlet elemeivel kombinálva.

A fentiek közül jól használható a tízgyöngyös sor, amelyben eltérő színű az egyik és a másik öt gyöngy. Ez jól szemlélteti az igen fontos (10-re) kiegészítő párokat.[1]

A különböző abakuszok közül a tízsoros abakuszt ajánlom. Ennek tíz sorában soronként tíz-tíz golyó van, minden sorban öt-öt másképpen színezve, és öt sor után még ez a színezés is megváltozik.[2]

Hogyan és miért használjuk a szemléltetőeszközöket?

A szemléltetőeszközök nagy segítséget jelentenek a számolás tanításában és tanulásában, mert egyformán jól modellezhetők velük maguk a számok és a velük végzett műveletek. A diákok kipróbálhatnak különböző ötleteket, módszereket, eközben konkrét tapasztalatokat szerezve, nem csupán elvont, elméleti módon okoskodva.

Ezek az eszközök több érzékszerven keresztül fejtik ki hatásukat, hiszen láthatók és tapinthatók is. A tanulást vizuális, térérzékeléses és mozgásos úton is elősegítik. Ha a tanár az eszközökkel való tevékenység során sok szóbeli információval szolgál, akkor még a hallás útján való tanulást is bevonja a folyamatba.

Ma már sokféle eszköz áll a tanárok rendelkezésére, de legyünk körültekintőek. Ha állandóan új eszközöket, új modelleket, új eljárásokat mutatunk be, könnyen összezavarhatjuk a diákot, akinek a fejében a matematika elkülönült témákból álló, összefüggéstelen ismerethalmaz lesz. Ha például abakuszt használunk a helyiértékek bemutatására, de semmi másra, a gyerek fejében könnyen külön fiókba kerülhet a helyiérték fogalma, és nem kapcsolódik a fejben végzett számoláshoz. Ha az osztásnak csak a bennfoglaló értelmezését tanítjuk, és később a törteket például egy pizza szeleteivel próbáljuk bevezetni, a gyerek fejében nem jön létre a kapcsolat a két ismeretelem között. A törtek bevezetésének ilyen módja különösen hátrányos lehet a diszkalkuliás vagy bizonytalan számfogalommal, „számérzékeléssel” rendelkező diákok esetében. Náluk különösen fontos, hogy összefüggő modelleket mutassunk be, és felhívjuk a figyelmet a kapcsolódásokra, hasonlóságokra.

A matematikai nehézséggel küzdő diákok számára a leghasznosabb és legsokoldalúbb módszer a színes rudak és a Dienes-készlet elemeinek használata. Ezek számos különböző helyzet és eljárás bemutatására alkalmasak, egészen eltérő szinteken. A velük végzett tevékenységet természetesen meg kell előznie a diszkrét eszközök (számolókorongok stb.) használatának, különösen a kisebb gyerekek esetében. A diszkrét eszközök túlzott használata azonban ahhoz vezethet, hogy a gyermek leragad a kevéssé hatékony egyesével számlálásnál. Könyvünk egyik célja éppen az ilyen kezdetleges módszerek meghaladása, a diákok „átlendítése” ezeken.

A szemléltetőeszközöket mindazonáltal körültekintően kell bevezetni és használni. Világosan meg kell értetni a diákokkal, mire valók. Az eszközök soha ne legyenek pusztán kezdetlegesebb alternatívái a számológéppel való számolásnak, és soha ne használjuk őket mechanikusan, kizárólag a megoldás megtalálására.

Az eszközöket ne használjuk pusztán szemléltetésre, és ne csak a legalapvetőbb összefüggések bemutatására használjuk őket. Elsősorban nem arra valók, hogy a tanár bemutasson velük valamit, hanem hogy a diákok használják őket, és felfedezzenek velük dolgokat. Hasznosabb egyféle eszközt használni különböző gyakorlatoknál, témákban és szinteken, nem pedig mindegyikhez másfélét. Mindig emlékeztessük diákjainkat, hogy a matematika nem arról szól, mi történik a számjegyekkel a papíron, hanem arról, mi

* Ezek olyan kockák, amelyek képesek egymáshoz kapcsolódni, és így felépíteni olyan számrudakat, amilyenek például a Stern-eszközökben eleve egyben vannak. (A ford. megjegyzése)

történik magukkal a számokkal a műveletek során. A papír és a ceruza csupán hasznos eszközök a műveletek lejegyzéséhez, vagy memóriasegédletek a fejben végzett számoláshoz és az elvont gondolkodáshoz.

A szemléltetőeszközök láthatóvá teszik a matematikai elveket, összefüggéseket. Lehetővé teszik, hogy a diák értelmezze az elvont dolgokat, és új ismeretek birtokába jusson. A megfelelő eszköz segíti a tanulót a számítások modellezésében, megértésében és elsajátításában. Az egyre biztosabb és összetettebb kognitív modellek hozzájárulnak a diák absztrakt gondolkodásának fejlődéséhez. A szemléltetőeszközökkel végzett tevékenység révén a diák felismerheti a matematika különböző területei közötti kapcsolatokat, és összefüggéseiben értheti meg a matematikát.

Hivatkozások

[1] Az eszköz elkészítéséről és használatáról további részletek és tanácsok olvashatók a következő könyvben: R. Bird (2007) *The Dyscalculia Toolkit*, Sage.

[2] A tízsoros abakusz használatáról bővebben: E. Grauberg (1997) *Elementary Mathematics and Language Difficulties*, Whurr.

2. MELLÉKLET

A színes rudak

Néhány gyakorlat színes rudakkal

Ismerkedj velük!

A rudak csak akkor használhatók a matematikai gondolkodás segédleteként, ha a diákok már jól ismerik a méretek (a megjelenített számok) és a színek közti összefüggést. Ennek érdekében használjuk minél többet a színes rudakat. A diákok illesszék őket egymáshoz, rakjanak ki belőlük téglalapokat, más alakzatokat, egyszóval: ismerkedjenek velük. Tegyük azonban világossá: a rudak nem játékszerek.

Nevezd meg a színeket!

Hagyományosan a következő neveket használjuk: fehér, rózsaszín, világoskék, piros, sárga, lila, fekete, bordó, sötétkék, narancssárga. (A magyar készletben van még 12 értékű zöld és 16 értékű barna rúd is.)

Tedd vissza a dobozba!

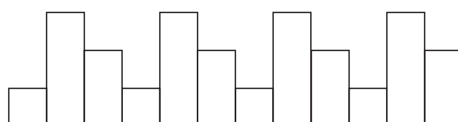
A rudak visszapakolása a dobozba újabb lehetőséget teremt a színek és méretek közti összefüggések gyakorlására. Beszéljük meg, gondolkodjunk együtt a tanulókkal arról, melyik rúd mekkora, hogyan illik a többihez, hogyan fér be a dobozba egy adott helyre stb.

Építs belőlük!

A rudakból mindenféle színes síkbeli alakzatot építhetnek a diákok (házat, autót, absztrakt mintákat stb.). Beszéltessük őket a képről: *Mit raktál ki? Milyen rudakat használtál hozzá?* stb.

Rejtsd el a rudat!

Válasszunk ki véletlenszerűen három rudat, és tegyük őket egymás mellé. (A rudak állhatnak hosszában és keresztben is.) Ismételjük meg még háromszor ugyanazt a sorrendet, hogy egy minta alakuljon ki.





Az egyik játékos forduljon el. A másik vegyen ki egy rudat a lerakottak közül, és tolja össze a többit, hogy ne legyen köztük rés. A visszaforduló játékosnak ki kell találnia, hogy honnan melyik rúd hiányzik. Később játszhatunk hasonlót három helyett négy vagy még több ismétlődő rúdból álló mintával.

Rakd ki te is!

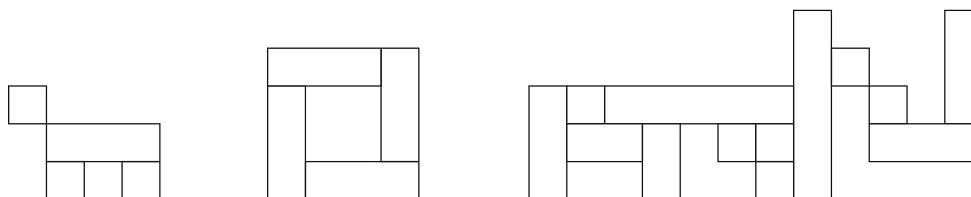
Az egyik diák válasszon ki néhány rudat a készletből, és tegye őket rendetlen halomban az asztalra. A másiknak ki kell választania a készletből ugyanennyi, ugyanilyen rudat. Ezután forduljon el. Az első játékos készítsen a saját kupacából valamilyen síkbeli alakzatot, mintát, képet. A második forduljon vissza, és rakja ki saját kupacából ugyanazt.

Másold le papírra!

Készítsünk négyzetrácsos papíron egyszerű téglalapos mintát. (Mivel a rudak 1 cm-enként változó méretűek, lehetőleg 1 cm-es négyzetrácsot használjunk.) Színezzük ki a rudaknak megfelelő színekkel az ábrát. A diákok másolják le saját papírjukra az egészet, szintén színesben.

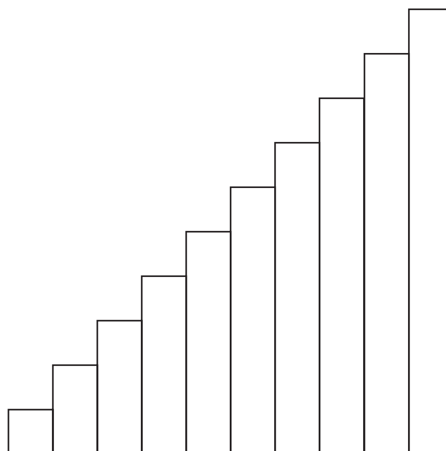
Építsd meg a tervrajzból!

Az előző gyakorlatban készült ábrákat a diákok építsék meg rudakból. (Készíthetünk új ábrákat is.) Idővel egyre bonyolultabb ábrákat adhatunk fel.



Készíts lépcsőt!

A lépcső egyesével, növekvő sorrendben egymás mellé tett rudakból áll. A gyakorlás során lehet időre versenyezni a kirakással. A lépcsőn lépegetve nevezzük meg a számokat, hogy kapcsolódjanak a színekhez. Egy rúd hosszát úgy is megkaphatjuk, ha végiglépegetünk (végigszámlálunk) a lépcsőn, és úgy is, ha megmérjük, hány egység (fehér kocka) teszi ki ugyanazt a hosszt.



Képzeld el a lépcsőt!

Készítsünk lépcsőt, majd takarjuk le (például papírlappal). Az egyik diák mondja sorban a színeket, egy másik a megfelelő számokat. Azután cseréljenek.

Vagy dobjunk egy kockával, és lássuk, ki tudja a csoportból a leggyorsabban kiválasztani a készletből a számnak megfelelő színű rudat.

Vagy az egyik gyerek válasszon tetszés szerint egy rudat a készletből, a másik pedig mondja meg, milyen színű a nagyság szerint következő (vagy az előző) rúd a sorban.

Vegyél ki egy lépcsőfokot!

A felépített lépcsőből az egyik gyerek vegyen ki egy rudat (miközben a másik elfordul), aztán tolja össze a megmaradt rudakat, hogy ne legyen köztük hézag. A másik visszafordulva mondja meg, honnan milyen színű és értékű rúd hiányzik.

Lépcsőépítő verseny

Két játékos rakja ki maga elé a rudakat 1-től 10-ig, lazán elhelyezve. Azután dobjanak felváltva egy 10-oldalú dobókával. Akkor helyezhetik el a lépcsőjükben az első, majd a következő fokot, ha a megfelelő számot dobták. Ki építi fel hamarabb a saját lépcsőjét?

Mérd meg a rudakat!

Mindegyik rudat megmérhetjük a fehér kockákkal. Melyiket mennyi építi fel? Kirakhatjuk mindegyik rudat rózsaszín rudakból? Miért nem? Beszélgessünk a páros és a páratlan számokról. Keressük meg, mely rudak rakhatók ki pontosan világoskék vagy sárga rudakból!

Becsülj és mérj a rudakkal!

A diákok adják meg különböző tárgyak (egy vonalzó, egy könyv, a cipőjük, egy doboz stb.) hosszát előbb becsléssel, majd a narancssárga rudak segítségével méréssel. Mivel egy ilyen rúd 10 cm hosszú, ha valami például csak kicsivel hosszabb két narancssárga rúdnál, arra mondhatjuk, hogy hosszabb, mint 20 cm. Gyakoroljunk.

Mérd meg a vonatot!

Vegyünk ki egy marék rudat a készletből. Egymás után téve őket alkossunk belőlük „vonatot”. A diákok becsüljék meg, milyen hosszú a „vonat”: először azt, hogy hány narancssárga rúdnyi, majd, hogy hány centiméter. Végül mérjék meg narancssárga rudakkal, majd mérőszalaggal is.

Találjunk duplákat!

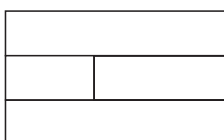
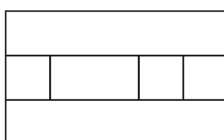
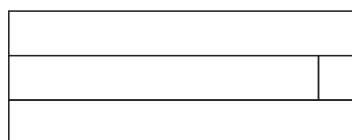
Mely rudak rakhatók ki két egyforma rúdból? Két kettes az egy …., két ötös egy …., a nyolc fele … stb.

Duplázzunk 20-ig!

Rakjunk ki egymás után például két 7-est, és mérjük meg a narancssárga rúddal. Mennyivel hosszabb a két fekete rúd a narancssárgánál? Azaz mennyi a hét duplája? Mennyi a 14 fele? Ismételjük más számokkal is.

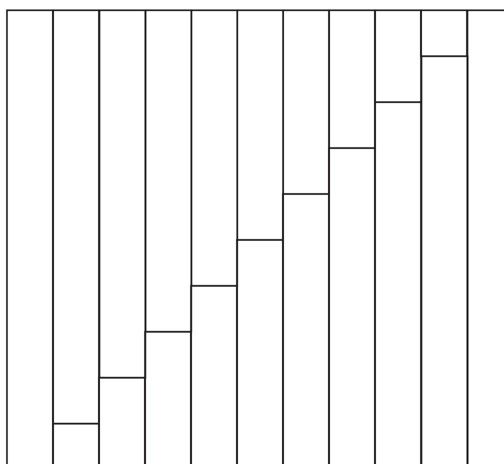
Készíts szendvicseket!

A szendvics két egyforma rúd, a köztük lévő „töltelék" pedig két másik rúd, amelyek együtt ugyanolyan hosszúak, mint a szélsők. A kérdések: *Különböző „töltelékkel" készíthetők-e ugyanakkora szendvicsek? Mi a helyzet kettőnél több darabból álló „töltelék" esetén? Hogyan épülhet fel az 5-ös szendvics „töltelékeʺ? Ugyanilyen marad a szendvics, ha fejtetőre állítjuk? Hányféleképpen készíthetünk 6-os, 7-es stb. szendvicset? Ha letakarod a szendvicseket, meg tudod mondani, milyen számokból épül fel a 6, a 7 stb.?*

Építs falat!

A diákok építsenek lépcsőt: tegyék egymás mellé, egyesével növekvő sorba a rudakat. Ezután felülről visszafelé haladva mindegyik rudat úgy egészítsék (pótolják) ki, hogy minden oszlop 10 egység hosszú legyen. Sok kérdést tegyünk fel. Ezekre először az elkészült „falat" nézve válaszoljanak, később már csak maguk elé képzelve azt. Például: *Mennyi meg 2 az 10? 5 meg mennyi az 10? Mennyit adjunk 7-hez, hogy 10-et kapjunk? Mennyi 10-ből 8?* stb.



Számok: sorakozó!

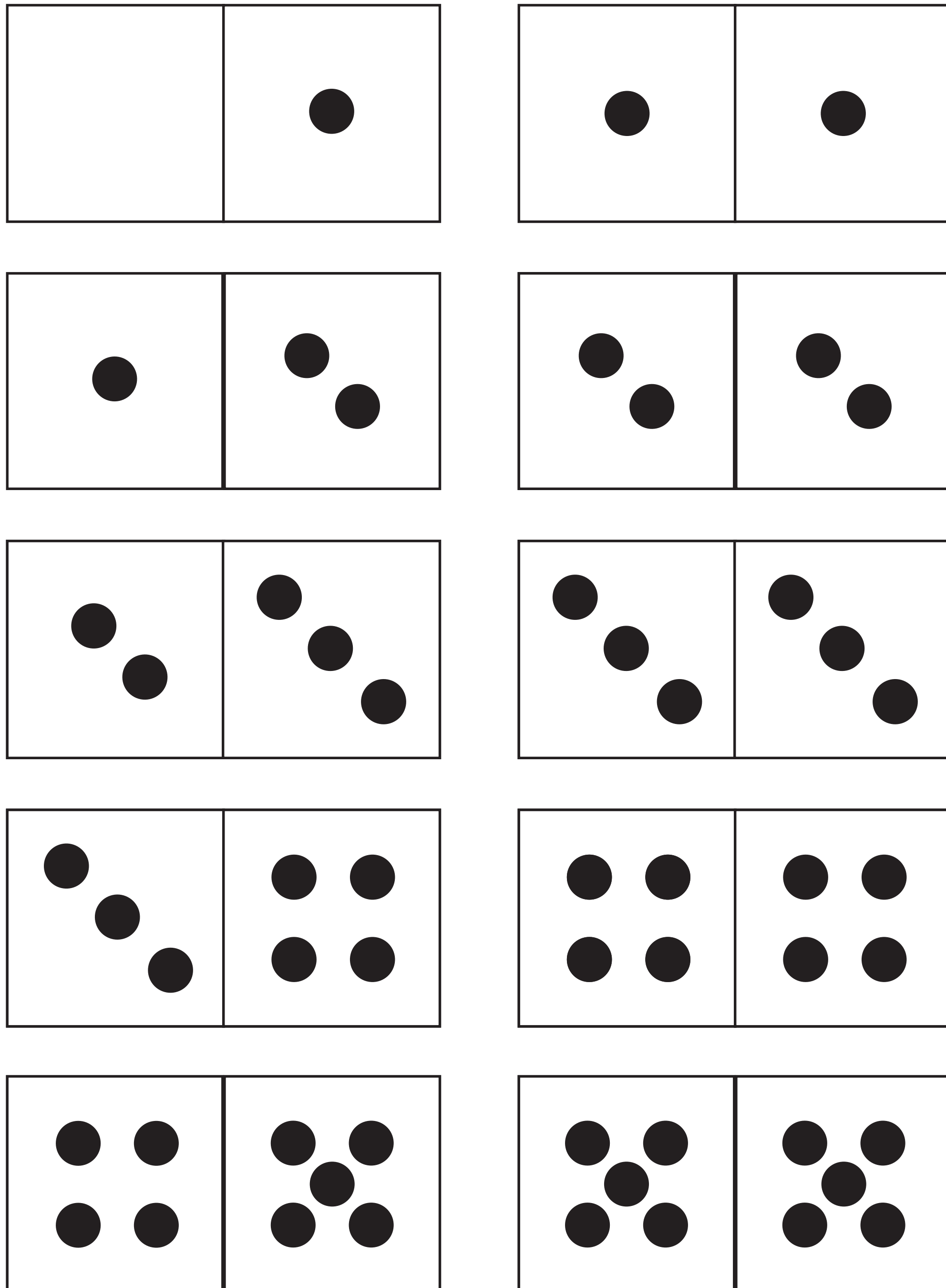
Tegyünk egymás után, hosszában öt narancssárga rudat. Válasszunk véletlenszerűen 1 és 50 közötti számokat, és kérdezzük meg a diákoktól: *Hol található a szám ezen a narancssárga csíkon?* (Ha szükséges, a csík felett ki is rakhatjuk rudakból a számot.) *Milyen messze van ettől a következő kerek szám? Mit hívunk kerek számnak?*

Hurrá, egyenletek!

a) Válasszuk ki bármely két rudat, és tegyük őket hosszában egymás után. A diákok találják meg, melyik az a rúd, amelyik ugyanolyan hosszú, mint ezek ketten együtt. (Például a rózsaszín meg a világoskék rúd együtt akkora, mint a sárga.) Fogalmazzuk meg a kirakott egyenletet négyféleképpen, mindig rámutatva, melyik rúdról beszélünk éppen: 2+3=5, 3+2=5, 5–3=2, 5–2=3. A „+" jelet szóban többféleképpen is megnevezhetjük: „és", „meg", „plusz". A „–" jel lehet: „kivonva", „-ból/-ből", „mínusz". Az „=" jel: „az", „egyenlő", „annyi, mint". Variáljuk a szóhasználatot, ne ragadjunk le egynél. Néha fordítsuk meg a sorrendet, és kezdjük az eredménnyel: 5=3+2, 5=2+3.

b) A diákok csukják be a szemüket. Tegyünk néhány rudat a dobozba, majd válasszunk közülük kettőt. Alkossunk belőlük egyenletet, és mondjuk el hangosan a kérdéseket. Miután megválaszolták a kérdéseket, a diákok nyissák ki a szemüket, és rögzítsék vizuálisan is a látványt, megismételve mind a négyféle olvasatot.

DOMINÓKÁRTYÁK (10 LAP)



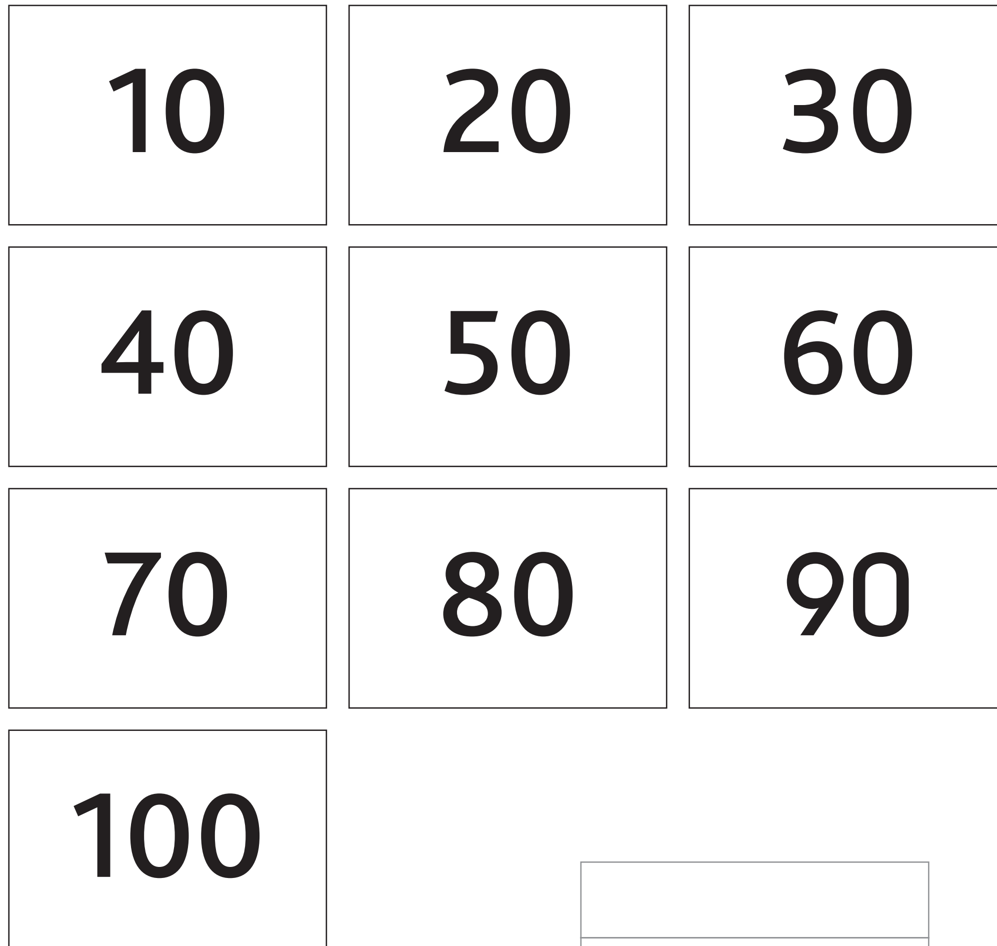
SZÁMJEGYKÁRTYÁK ÉS TARTÓDOBOZ

Az ábra tetszés szerint nagyítható. Minden számjegyből négy kártya kerüljön egy dobozba.



SZÁMJEGYKÁRTYÁK ÉS TARTÓDOBOZ

Az ábra tetszés szerint nagyítható. Minden számjegyből négy kártya kerüljön egy dobozba.





SUDOKU FELADVÁNYOK

1, 2 (könnyű)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

A feladatok ezen a szinten kizárásos alapon oldhatók meg, illetve a számok lehetséges összetevőit, kiegészítő párjait keresve.

4		**5**	*6*	
5	*3*	*7*	*4*	
6			*7*	
	6		**4**	**3**
7		*3*		**5**

3	*3*		*7*	*7*
5	*6*	*6*		
4			*4*	
3	*7*	**5**	**4**	*7*
		4		

SUDOKU FELADVÁNYOK

3, 4 (könnyű)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

6		*7*		*7*
7	*3*	*4*		
		5	*6*	
7	**4**	*3*	**5**	**3**
	3		*5*	

6		*4*	**5**	*5*
3	**5**		*6*	
4		**5**		*5*
5	*3*	*6*	*4*	
4				**5**

SUDOKU FELADVÁNYOK

5, 6 (könnyű)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

3	*5*		**4**	**5**
	5	*4*	*5*	*5*
5	*6*			
5		**5**	**1**	*5*
	7		**5**	

5	*3*		*4*	**4**
7	*4*	**5**		*7*
		4	*7*	
3	*7*			*4*
	5	*6*		

SUDOKU FELADVÁNYOK

7, 8 (közepes)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

A feladatok ezen a szinten hasonlóan oldhatók meg, mint a könnyű szinten, illetve a sorok és oszlopok teljes összegére kell figyelni.

5		*5*		**5**
3	*6*	**5**	*5*	
7		*4*		**2**
	3	*6*		*7*
6		*6*		

5	*5*	*3*		*5*
4		**5**	**4**	
	7		**5**	*5*
6	**5**	*5*		
	6			**5**

SUDOKU FELADVÁNYOK

9, 10 (közepes)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

6	4		**5**	5
	5	5		
4		**5**	6	
6	6		4	**3**
	6			**5**

4	5	3		**5**
6		7		4
	6		**5**	
5	6		4	6
	5	**4**		

SUDOKU FELADVÁNYOK

11, 12 (közepes)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

4	*3*	*7*	*4*	
4			**5**	*6*
	9		*7*	
2	*4*			**5**
9		**3**	*3*	

5	*5*		*5*	
4	*4*	*5*	*6*	**5**
3				*7*
	5	*6*		
5		**5**	*5*	

SUDOKU FELADVÁNYOK

13, 14 (nehéz)

Ezekben a feladatokban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

4		*7*		**5**
7			*7*	
5	**4**		*3*	
5	*7*		*4*	
	7		*7*	

5		*6*		**4**
7	*6*			**5**
	8	*6*		*4*
		8	**4**	
9			*3*	

SUDOKU FELADVÁNYOK

15, 16 (nehéz)

Ezekben a feladatokban 5-től 9-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

16		14	11	14 8
15	7		5	
14			14	
14	11		15	
	6	15		9

14		8	13	
15		14	15	
15 6	14		7	13
		12	5	
12		14		9

SUDOKU FELADVÁNYOK

17, 18 (nehéz)

Ebben a feladatban 1-től 5-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban és minden oszlopban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

6			5	7
8	9		6	
	4			
6	6	7		5
		6		

Ebben a feladatban 1-től 6-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban, minden oszlopban és minden, azonos háttérszínű (szürke vagy fehér) tartományban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített két mezőben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

3		5	10		4
4	9		7		
4	9	10		5	
		3		11	
8		3		6	9
8		4	4		

SUDOKU FELADVÁNYOK

19, 20 (nehéz)

Ezekben a feladatokban 1-től 6-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban, minden oszlopban és minden, azonos háttérszínű (szürke vagy fehér) tartományban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített mezőkben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

3	7	11	6	8	
				7	
10	7	4	**6**	5	
			4	9	
8	10			3	
	3		11		**4**

7		**5**	8		6
7			11		
8	6		4	**4**	
	10			6	**5**
9		**2**	9		10
5	4				

SUDOKU FELADVÁNY

21 (nehéz)

Ebben a feladatban 1-től 9-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban, minden oszlopban és minden, azonos háttérszínű (szürke vagy fehér) tartományban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített mezőkben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

15	11		9		8		8	
	6		16		10	4	9	17
9	11		9					
	17		4	8		11	4	
9	3	4		17			11	
		13		8		17		7
4	16		10	7	9	11		
	8					6	16	
12		8		16			7	

SUDOKU FELADVÁNY

22 (nehéz)

Ebben a feladatban 1-től 9-ig kell beírni a számokat a négyzetekbe úgy, hogy mindegyik szám minden sorban, minden oszlopban és minden, azonos háttérszínű (szürke vagy fehér) tartományban csak egyszer szerepelhet. A vastag vonallal körülkerített mezőkben szereplő számok összegének meg kell egyeznie a bal felső sarokba írt értékkel.

3		11		17		7		16
11	**6**	4		**7**	7		**8**	
	17		7		3		11	
11		9		17		6		7
15	**5**	12		**1**	11	15	**2**	
	3		8				15	
9		16		5		15		3
10	**7**	10		**5**	4		**9**	
	4		17		13		9	

MENETELÉS

Kétszemélyes játék

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

SZABÁLYOK: Mindkét játékos a saját pályáján játszik (lásd az ábrát), egy-egy pakli számkártyával, amelyben nyolc-nyolc lap 1 és 4 közötti szám és négy-négy lap 5 és 9 közötti szám található.

A játékosok öt részre osztott pörgettyűt pörgetnek felváltva, és a kapott számú (1–5 közötti) lapot húzzák a saját paklijukból. Ha a rendelkezésükre álló lapok közül bármilyen kombinációban képesek 10-es összeget előállítani, akkor ezeket a lapokat pályájuk következő mezőjére teszik, miközben hangosan kimondják, hogy honnan hová léptek, és hogyan. Például: „A 10-esre tudok lépni, mert van egy hetesem és egy hármasom." Vagy: „Újabb 10-est gyűjtöttem össze 2+3+5 módon, ezért a 20-asról a 30-asra lépek." Egy körben annyi tízes lépést tehet a játékos, amennyit csak lehetővé tesznek a nála lévő kártyák, de csak tízesével lehet lépni. A megmaradt kártyákat a játékos őrzi a következő körbeli húzásig, újabb kombinációkhoz. Az nyer, aki először ér a pálya végére.

MENETELÉS

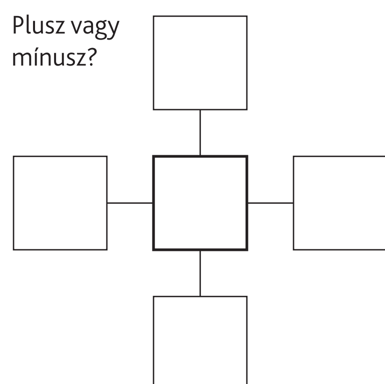
Kétszemélyes játék

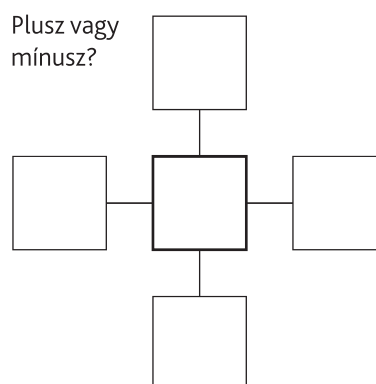
SZABÁLYOK: Mindkét játékos a saját pályáján játszik (lásd az ábrát), egy-egy pakli számkártyával, amelyben nyolc-nyolc lap 1 és 4 közötti szám és négy-négy lap 5 és 9 közötti szám található. Szükség van még egy 1-től 4-ig vagy 5-ig számozott pörgettyűre. A játékosok megegyeznek, hogy a 10 melyik egymást követő tizenkét többszörösét írják be a pálya mezőibe.

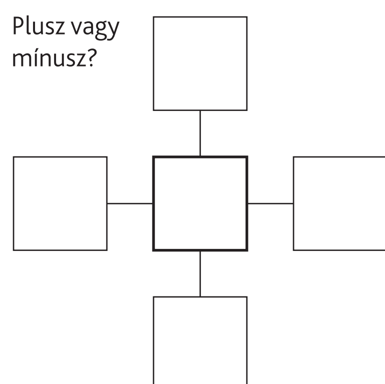
A játékosok öt részre osztott pörgettyűt pörgetnek felváltva, és a kapott számú (1–5 közötti) lapot húzzák a saját paklijukból. Ha a rendelkezésükre álló lapok közül bármilyen kombinációban képesek 10-es összeget előállítani, akkor ezeket a lapokat pályájuk következő mezőjére teszik, miközben hangosan kimondják, hogy honnan hová léptek, és hogyan. Például: „Letettem egy négyest meg egy hatost, ami 10. Ezzel a 10-zel a 80-asról a 90-esre tudok lépni." Egy körben annyi tízes lépést tehet a játékos, amennyit csak lehetővé tesznek a nála lévő kártyák, de csak tízesével lehet lépni. A megmaradt kártyákat a játékos őrzi a következő körbeli húzásig, újabb kombinációkhoz. Az nyer, aki először ér a pálya végére.

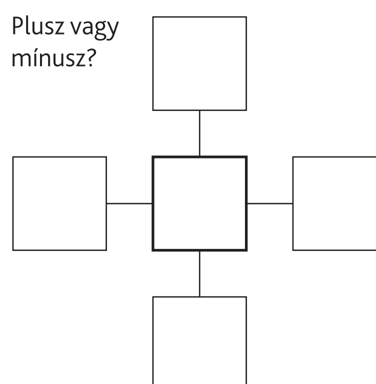
Sablonok a Plusz vagy mínusz? játékhoz

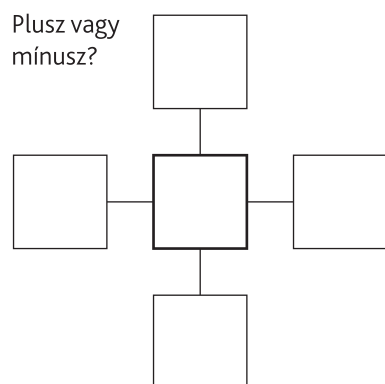
(1. fejezet)

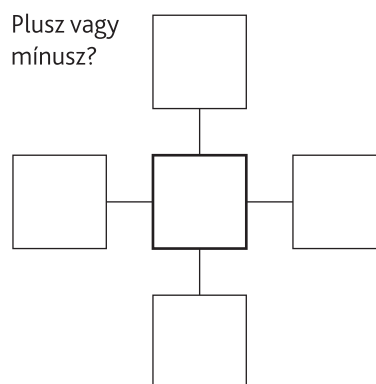












Többszörösök

Többszörösök az 1 és 6 közötti szorzótáblákból

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

SZABÁLYOK: A játékot két játékos játssza. Szükség van egy szabályos dobókockára és számolókorongokra, a két játékos számára két különböző színben. A játékosok felváltva dobnak a kockával. Minden dobás után egy korongot helyeznek a tábla bármelyik számára, amely többszöröse a dobott számnak. Például, ha 2-est dobtunk, bármelyik páros számra, vagyis a 2-es szorzótábla bármelyik eredményére tehetünk korongot. Az nyer, akinek előbb összegyűlik négy korongja egy sorban.

Többszörösök

Többszörösök a 4 és 9 közötti szorzótáblákból

24	25	27	28	30
32	35	36	40	42
45	48	49	50	54
55	56	60	63	64
65	70	72	80	90

SZABÁLYOK: A játékot két játékos játssza. Szükség van egy 4-től 9-ig számozott dobókockára és számolókorongokra, a két játékos számára két különböző színben. A játékosok felváltva dobnak a kockával. Minden dobás után egy korongot helyeznek a tábla bármelyik számára, amely többszöröse a dobott számnak. Az nyer, akinek előbb összegyűlik négy korongja egy sorban.



SZABÁLYOK: A játékot két játékos játssza.

Szükség van egy szabályos dobókockára, két bábura, papírra, ceruzára és zsetonokra (vagy pénzérmékre).

A játékosok felváltva dobnak a kockával és lépnek a bábujukkal. Amelyik számra lép a bábu, annak a *valódi* osztóit (vagyis 1 és önmaga kivételével a többi osztót) a játékos felírja a papírjára. Például, ha a 10-es számra lépett, akkor az 1, 2, 5, 10 közül csak a 2-t és az 5-öt írja fel.

Ezután a játékos hangosan felolvassa a listáját, az „osztók” szót használva. Például: „A 10 osztói 2 és 5.” Ha az ellenfél egyetért az elhangzottakkal, akkor a játékos a felírt osztóknak megfelelő értékű zsetont (vagy pénzérmét) kap a „banktól”. A példánál maradva: egy 2-est és egy 5-öst.

A játéktáblán szereplő számok mindegyike a megnevezett szorzótáblákból való.

A játék akkor ér véget, ha mindkét játékos kétszer körbeért a pályán. Az nyer, akinek nagyobb összértékű zsetonja (pénze) van. Tipp: 10-es értékű kupacokba rendezve könnyű őket megszámolni.

START →	9	24	50	18	26
56					32
72					35
25		TOVÁBBI OSZTÓK			12
49					42
100	27	50	45	48	20

SZABÁLYOK: A játékot két vagy három játékos játssza.

Szükség van egy szabályos dobókockára, minden játékos számára bábura, papírra, ceruzára és zsetonokra (vagy pénzérmékre).

A játékosok felváltva dobnak a kockával és lépnek a bábujukkal. Amelyik számra lép a bábu, annak a *valódi* osztóit (vagyis 1 és önmaga kivételével a többi osztót) a játékos felírja a papírjára.

Ezután a játékos hangosan felolvassa a listáját, az „osztók" szót használva. Például, ha a 26-os mezőre lépett: „A 26 osztói 2 és 13." Ha a többi játékos egyetért az elhangzottakkal, akkor a játékos a felírt osztóknak megfelelő értékű zsetont (vagy pénzérmét) kap a „banktól".

A játék akkor ér véget, ha mindegyik játékos kétszer körbeért a pályán. Az nyer, akinek nagyobb összértékű zsetonja (pénze) van. Tipp: 10-es értékű kupacokba rendezve könnyű őket megszámolni.

Szöveges feladatok szorzásra és osztásra

A szöveges feladatok a gyakorlati, mindennapi életből merítenek. Olyan helyzeteket, történeteket mutatnak be, amelyek valamilyen számítást tartalmaznak.

Egy egyszerű állítás (vagy egyenlet) általában három számot tartalmaz; például $x+y=z$ vagy $ab=c$.

Egy könnyű szöveges feladatban a három szám közül kettőt megad a feladat. A kérdés a harmadik meghatározására irányul. Az általunk felsorolt esetekben az adott feltételekhez kell szöveges feladatot fogalmazni, amely két számot megad, és a harmadikat kérdezi.

<u>Példa:</u>
Van 8 teherautó, mindegyiknek 6 kereke van.
Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 6·8 *b)* 48:6 *c)* 48:8
Lehetséges megfogalmazások:

a) 6·8 Egy garázsban 8 teherautó áll, mindegyiknek 6 kereke van. Mindegyiken gumit kell cserélni. Hány gumit kell kicserélni összesen?

b) 48:6 Matyi az úton elhaladó teherautók kerekeit számolja. Minden elhaladó teherautónak 6 kereke van. Matyi tíz perc alatt 48 kereket számolt össze. Hány teherautó haladt el előtte?

c) 48:8 Hány kereke van egy teherautónak, ha 8 teherautónak összesen 48 kereke van?

1. Van 5 tojástartó, mindegyikben 12 tojás.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 12·5 *b)* 60:5 *c)* 60:12
2. Van 7 kancsó, mindegyikben 6 pohárnyi víz.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 7·6 *b)* 42:7 *c)* 42:6
3. Van 9 asztal, mindegyik körül 4 szék.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 4·9 *b)* 36:4 *c)* 36:9
4. Egy munkás 7 napon át összesen 56 órát dolgozik.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 8·7 *b)* 56:8 *c)* 56:7
5. Van 3 csapat, ezekben összesen 36 játékos játszik.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* 3·12 *b)* 36:3 *c)* 36:12

Az alábbi esetekben a diák adjon meg saját számokat, és ezekből fogalmazzon meg feladatokat.

6. Van ____ sor vetemény, soronként ____ palántával.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* __·__ *b)* __:__ *c)* __:__
7. Van ____ doboz, mindegyikben ____ sütemény.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* __·__ *b)* __:__ *c)* __:__
8. Van ____ vasúti kocsi, összesen ____ utassal.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* __·__ *b)* __:__ *c)* __:__
9. Van összesen ____ könyv, ____ polcon.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* __·__ *b)* __:__ *c)* __:__
10. Van ____ darab labda, ezek egyenként ____ Ft-ba kerülnek.
   Fogalmazzunk szöveges feladatot a következő műveletekhez: *a)* __·__ *b)* __:__ *c)* __:__

Üres számegyenesek a szorzótábla megjelenítéséhez

